Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2015

Ana Paula Ferreira Palmeira

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino da Geometria Analítica do Ensino Secundário

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática,
2015

Ana Paula Ferreira Palmeira

Recursos Digitais de Apoio ao Ensino da Geometria Analítica do Ensino Secundário

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor João Pedro Cruz, Professor Auxiliar do Departamento do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, e da Professora Doutora Dina Seabra, Professora Adjunta da Escola Superior de Tecnologia e Gestão de Águeda da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president	**Prof.ª Doutora Rute Correia Lemos**
	Professora Auxiliar, Universidade de Aveiro
vogais / examiners committee	**Prof. Doutor Gaspar José Brandão Queirós Azevedo Machado**
	Professor Auxiliar, Universidade do Minho
	Prof. Doutor João Pedro Antunes Ferreira da Cruz
	Professor Auxiliar, Universidade de Aveiro

agradecimentos

Agradeço profundamente ao Professor João Pedro Cruz e à Professora Dina Seabra pela total disponibilidade, orientações e sugestões prestadas ao longo deste trabalho. Sinto-me privilegiada por os ter conhecido como orientanda.

Ao meu marido, Pedro, e à minha filha, Ana Pedro, por encherem a minha vida de amor.

Aos meus pais, Teresa e Victor, a quem tudo devo.

A toda a minha família e amigos, por todo o apoio prestado.

Palavras-chave geometria analítica no plano, geometria analítica no espaço, escolha múltipla, MEGUA, SIACUA, SageMath

Resumo O presente trabalho tem como principal objetivo a criação de recursos digitais de apoio ao ensino da Geometria Analítica, usando a plataforma MEGUA, para os estudantes do ensino secundário. Esses recursos digitais consistem num banco de questões de escolha múltipla, com respetivas resoluções, disponibilizados na plataforma SIACUA e que permitem ao estudante a realização de um trabalho autónomo e auto-regulador das suas aprendizagens.

Keywords plane analytic geometry, space analytic geometry, multiple choice, MEGUA, SIACUA, SageMath

Abstract This work has as main objective the creation of digital resources to support Analytic Geometry teaching, using MEGUA plataform, for secondary school students. These digital resources consist of a database of multiple-choice questions, with respective resolutions, available on SIACUA free platform, which allows the student to carry out an autonomous and self-regulating work in their learning.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

De acordo com as Normas para o Currículo e Avaliação em Matemática Escolar, "a sociedade actual espera que as escolas garantam que todos os estudantes tenham a oportunidade de se tornar matematicamente alfabetizados, sejam capazes de prolongar a sua aprendizagem, tenham iguais oportunidades de aprender e se tornem cidadãos aptos a compreender as questões em aberto numa sociedade tecnológica."[21].

A integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) nas práticas letivas é uma necessidade pois, além de constituírem uma ferramenta de trabalho que possibilita o acesso a uma grande quantidade de informação, facilita a diversificação de estratégias e materiais pedagógicos que estimulam o interesse dos estudantes e os motivam para a disciplina da Matemática.

De acordo com Pacheco-Venegas *et al* [24], o processo de aprendizagem já não é caraterizado pela transmissão de conhecimentos do professor para o estudante mas, passou a ser um processo no qual os estudantes constroem o próprio conhecimento. Assim, é cada vez mais importante que os estudantes se envolvam em atividades que lhes permitam conhecer não só as suas capacidades, como também as suas dificuldades, de modo a poderem melhorar as suas aprendizagens. Este processo pode ser significativamente afetado pela motivação do estudante que, por sua vez, está diretamente relacionada com os efeitos nos diferentes processos cognitivos que são relevantes nas aprendizagens matemáticas.

Neste sentido, é imperioso que os professores, "comprometidos com a qualidade da sua prática pedagógica, reconheçam a importância da integração das tecnologias no currículo e na prática escolar, como um veículo para o desenvolvimento social, emocional e intelectual do aluno"[1].

O Plano Tecnológico da Educação foi um programa do XVII Governo Constitucional, aprovado em 2007, que tinha como meta a modernização tecnológica das escolas com 2.º e 3.º ciclos do ensino básico e com ensino secundário, com o objetivo de promover a integração e a utilização generalizada das TIC nos processos de ensino e de aprendizagem e na gestão escolar.

Entre outras medidas, previa-se que as escolas até 2010 fossem munidas de um quadro interativo multimédia por cada 3 salas, um computador com ligação à Internet por sala e um computador por cada dois estudantes.

A realidade é que nem todas as escolas foram equipadas com quadros interativos ou têm disponível uma sala com computadores para ser utilizada por uma turma de estudantes.

No entanto, de acordo com a Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência [8], a relação estudantes/computadores com ligação à Internet desceu muito significativamente desde o ano letivo 2001/2002, como pode ser analisado no gráfico que se segue.

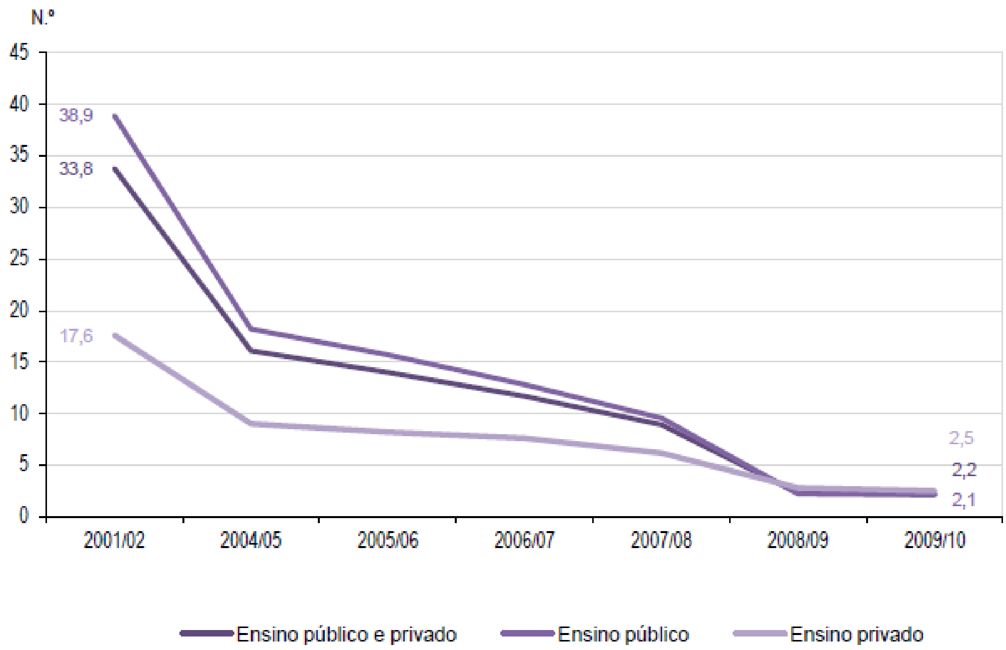


Figura 1.1: Relação estudantes/computador com ligação à Internet [8]

De acordo com os resultados do Inquérito à Utilização de Tecnologias da Informação e da

Comunicação pelas Famílias, promovido pelo Instituto Nacional de Estatística (INE), realizado em 2014, 63% dos agregados familiares em Portugal têm ligação à Internet em casa através de banda larga e, nas famílias com crianças até aos 15 anos, o acesso às TIC supera a média nacional, atingindo proporções próximas de 90% [13]. Além disso, vários são os locais públicos de acesso livre à Internet (centros comerciais, escolas, bibliotecas municipais, cafés, ...).

De acordo com Pacheco-Venegas *et al* [24], Wick [29] apresenta bons argumentos na utilização de *software open source* com objetivos educacionais, descrevendo as suas funções e discutindo a sua utilidade. Em particular, salienta as capacidades da plataforma *SageMath* [26], que utiliza a linguagem de programação *Python*, que se encontra em ascensão de popularidade.

Com o descrito, torna-se pertinente a criação de recursos disponíveis em plataformas de acesso livre.

A elaboração desta dissertação tem como principal objetivo a criação de recursos digitais para o estudo da Geometria Analítica do ensino secundário, mais especificamente, da disciplina de Matemática A dos 10.º e 11.º anos de escolaridade.

O desafio inicial era a elaboração de exercícios parametrizados de escolha múltipla a serem integrados no projeto MEGUA (*Mathematics Exercise Generator, University of Aveiro*), que utiliza a plataforma *SageMath*, e disponibilizados na plataforma SIACUA (Sistema Interativo de Aprendizagens por Computador, Universidade de Aveiro). No entanto, além das 27 questões de escolha múltipla criadas, foram ainda criados quatro grupos de questões de resposta aberta, que, para já, ainda não se encontram disponíveis *online*.

O presente trabalho está dividido em cinco capítulos. No presente capítulo pretendeu analisar-se a pertinência da criação de exercícios disponíveis em plataformas de acesso livre.

Com o segundo capítulo pretende apresentar-se o suporte teórico aos exercícios criados, fazendo inicialmente referência aos temas e conceitos da Geometria Analítica em estudo, tendo como base o Programa e Metas Curriculares de Matemática A [19].

No terceiro capítulo são apresentados os *softwares* e plataformas utilizados na criação dos exercícios e no modo como estes serão disponibilizados ao público. Apresentam-se também os passos necessários para a criação de um exercício.

Todos os exercícios criados são parametrizados. No quarto capítulo é apresentada uma concretização dos parâmetros de cada um dos exercícios e respetivas resoluções. No CD que acompanha esta dissertação está incluído o código fonte de cada um dos exercícios.

No quinto, e último capítulo, são feitas algumas considerações sobre o trabalho desenvolvido e do trabalho que se poderá desenvolver futuramente.

Capítulo 2

Geometria Analítica no Ensino Secundário

Os conteúdos tratados tiveram como base o Programa e Metas Curriculares de Matemática A [19], cuja implementação está prevista para o ano letivo 2015/2016, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.º e 12.º anos de escolaridade.

Na elaboração dos recursos digitais do tópico Geometria Analítica decidiu distinguir-se quatro subtópicos principais, cada um deles subdivididos em vários conceitos:

- Geometria analítica no plano
  - Referenciais ortonormados;
  - Distância entre pontos e mediatriz;
  - Circunferência e elipse;
  - Domínios planos;
  - Declive e inclinação de uma reta.
- Cálculo vetorial no plano
  - Coordenadas de um vetor;
  - Operações com vetores;
  - Equações de uma reta;

  - Colinearidade de vetores.

- Geometria analítica no espaço

  - Referenciais ortonormados;
  - Equações de planos;
  - Equações da reta;
  - Distância entre pontos;
  - Subconjuntos do espaço;
  - Aplicações do cálculo vetorial.

- Produto escalar de vetores

  - Cálculo e propriedades;
  - Perpendicularidade.

Neste capítulo apresentam-se algumas definições e resultados que constituem o suporte teórico dos exercícios criados.

2.1 Espaço vetorial e referenciais ortonormados

Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ uma base[1] de $\mathbb{R}^n$, o par $(O; (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n))$ é designado por referencial, em que O é um ponto fixo designado por origem do referencial. Se a base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ é ortonormada, ou seja, se os vetores são ortogonais dois a dois e se têm comprimento 1, o referencial é designado por ortonormado, durante o trabalho designado por o.n.. Se $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, o referencial é designado por canónico.

O estudo da Geometria do ensino secundário centra-se apenas em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e é sempre utilizado o referencial canónico. Particularizando para $\mathbb{R}^3$, considerando O a origem do referencial

[1] os vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ são um conjunto de geradores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independentes, ou seja, todo o ponto de $\mathbb{R}^n$ escreve-se como combinação linear de $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ e $\forall \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2, \ldots, \alpha_n\vec{e}_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

e os vetores da base $\vec{e_1}(1,0,0)$, $\vec{e_2}(0,1,0)$ e $\vec{e_3}(0,0,1)$, o referencial é normalmente designado por $Oxyz$. As retas definidas pelos vetores da base são designadas por eixos coordenados e representados por Ox (eixo das abcissas), Oy (eixo das ordenadas) e Oz (eixo das cotas). O ponto de intersecção dos eixos coordenados é a origem do referencial.

Chamam-se coordenadas do ponto P no referencial $(O,(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n}))$ às coordenadas do vetor $\overrightarrow{OP}$ em relação à base considerada. Ou seja, sendo $\overrightarrow{OP} = p_1\vec{e_1}+p_2\vec{e_2}+\ldots+p_n\vec{e_n}$, podemos dizer que o ponto P tem de coordenadas $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$.

Na Figura 2.1 particulariza-se para $\mathbb{R}^3$.

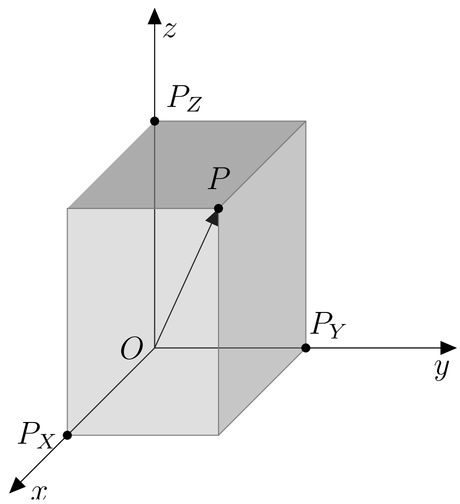


Figura 2.1: Coordenadas de um ponto em $\mathbb{R}^3$

Geometricamente, as coordenadas do ponto P coincidem com as projeções ortogonais do ponto, P_X, P_Y e P_Z, sobre os eixos coordenados.

Designam-se por planos coordenados os três planos perpendiculares entre si, que podem ser determinados por dois eixos coordenados e representam-se por xOy, xOz e yOz, consoante os eixos coordenados que contêm.

2.1.1 Coordenadas de um vetor

Sendo $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial e $(\vec{e_1},\vec{e_2},\ldots,\vec{e_n})$ uma sua base, qualquer vetor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma decomposição única de vetores da referida base.

Ou seja,

$$\exists! \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \vec{u} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n.$$

Aos vetores $\alpha_i \vec{e}_i, i = 1, 2, \ldots, n$, dá-se a designação de componentes do vetor $\vec{u}$ e o n-uplo $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ designa as suas coordenadas.

A medida do comprimento do vetor $\vec{u}$ designa-se por norma de $\vec{u}$ e representa-se por $||\vec{u}||$.

Por vezes a norma é designada por comprimento.

Na Figura 2.2 particulariza-se para $\mathbb{R}^2$.

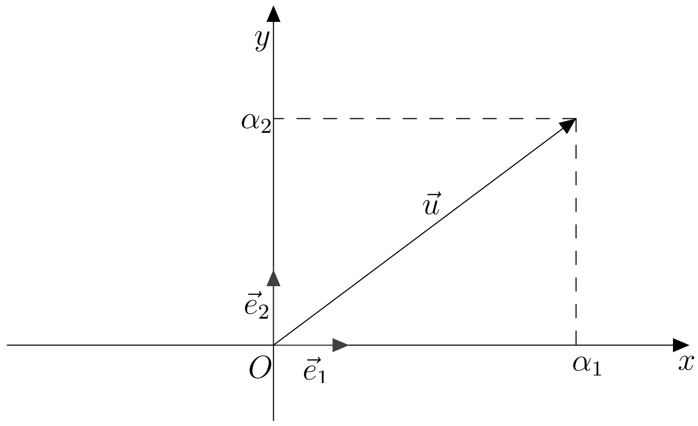


Figura 2.2: Coordenadas de um vetor em $\mathbb{R}^2$

Recorrendo ao Teorema de Pitágoras, tem-se que

$$||\vec{u}|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

No que se segue, dado um vetor $\vec{u}$, as suas coordenadas designam-se por $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Apesar de para $\mathbb{R}^n$ se perder a interpretação geométrica, a norma do vetor $\vec{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ é

$$||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

Um vetor de norma 1 é designado por vetor unitário.

Dado um vetor $\vec{v} \neq \vec{0}$, o vetor $\dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$ é unitário e possui a mesma direção e sentido de $\vec{v}$.

2.1.2 Operações entre vetores

Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, o vetor $\vec{w} = \vec{u}+\vec{v}$ tem de coordenadas a soma das coordenadas correspondentes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, para $\vec{u}(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$,

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).$$

Particularizando para $\mathbb{R}^2$, sendo $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$.

Geometricamente, o vetor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ une a origem de $\vec{u}$ à extremidade de $\vec{v}$ quando se faz coincidir a origem de $\vec{v}$ com a extremidade de $\vec{u}$.

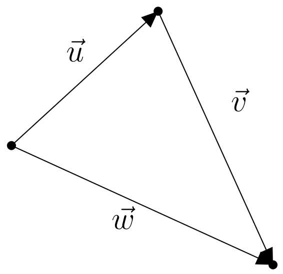


Figura 2.3: Soma de vetores

Dado um vetor $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e α um número real, o produto de $\vec{u}$ por α, $\alpha\vec{u}$, é um vetor de coordenadas $(\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$, tal que:

- Se $\alpha = 0$, $\alpha\vec{u} = \vec{0}$, o vetor nulo;
- Se $\alpha > 0$, $\alpha\vec{u}$ tem a mesma direção e sentido de $\vec{u}$;
- Se $\alpha < 0$, $\alpha\vec{u}$ tem a mesma direção de $\vec{u}$, mas sentido contrário.

Para $\alpha = -1$, $\alpha\vec{u} = (-1)\vec{u} = -\vec{u}$ é designado o vetor simétrico de $\vec{u}$.

Propriedade 2.1. *Sejam $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vetores de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ escalares. As operações com vetores possuem as seguintes propriedades:*
Propriedades da adição:

- *Propriedade comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;*

- *Propriedade associativa:* $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$;
- *Existência de elemento neutro:* $\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$;
- *Existência de elemento simétrico: Para cada vetor* $\vec{v}$ *existe um único vetor* $-\vec{v}$ *tal que* $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$.

Propriedades da multiplicação de um vetor por um escalar:

- *Propriedade distributiva da multiplicação de escalares em relação à adição de vetores:* $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$;
- *Existência de elemento absorvente:* $0.\vec{u}=\vec{0}$;
- *Propriedade associativa da multiplicação por escalares:* $(\alpha_1\alpha_2)\vec{u}=\alpha_1(\alpha_2\vec{u})$;
- *Propriedade distributiva da multiplicação de vetores em relação à adição de escalares:* $(\alpha_1+\alpha_2)\vec{u}=\alpha_1\vec{u}+\alpha_2\vec{u}$;
- *Existência de elemento neutro:* $1.\vec{u}=\vec{u}$.

Considerem-se os pontos $A(a_1,a_2)$ e $B(b_1,b_2)$ e os vetores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OB}$.

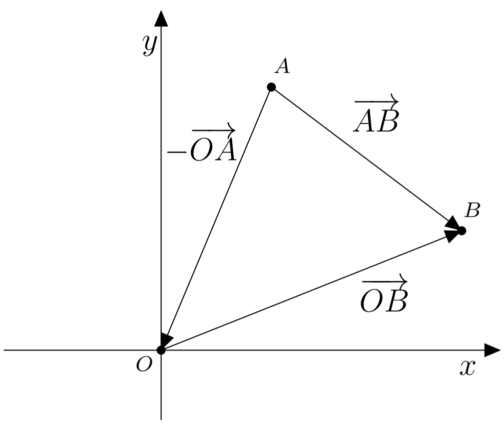


Figura 2.4: Soma de vetores em $\mathbb{R}^2$

Geometricamente pode concluir-se que $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ e, consequentemente,

$$\overrightarrow{AB}=(b_1,b_2)-(a_1,a_2)=(b_1-a_1,b_2-a_2).$$

Como $\overrightarrow{AB} = B - A$, vem que $B = A + \overrightarrow{AB}$.

Pode ainda concluir-se que, dado um ponto $A(a_1, a_2)$ e um vetor $\vec{v}(v_1, v_2)$, o ponto $A + \vec{v}$ tem de coordenadas $(a_1 + v_1, a_2 + v_2)$. Geometricamente, a soma de um ponto com um vetor resulta na translação do ponto segundo a direção, sentido e comprimento de $\vec{v}$.

Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dizem-se colineares se têm a mesma direção.

Proposição 2.1. *Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares e $\vec{v} \neq \vec{0}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.*

Demonstração. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares, então $\vec{u}$ e $\alpha\vec{v}$ têm a mesma direção.

Suponha-se que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm o mesmo sentido. Fazendo $\alpha = \dfrac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$, tem-se que

$$||\alpha\vec{v}|| = \alpha||\vec{v}|| = \frac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}.||\vec{v}|| = ||\vec{u}||.$$

Como os vetores $\vec{u}$ e $\alpha\vec{v}$ têm a mesma direção, sentido e norma, então $\vec{u}$ e $\alpha\vec{v}$ são iguais.

A demonstração é análoga para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com sentidos opostos, fazendo $\alpha = -\dfrac{||\vec{u}||}{||\vec{v}||}$. □

2.1.3 Produto escalar de vetores

Considerem-se os pontos O, P e Q, como se representam na Figura 2.5.

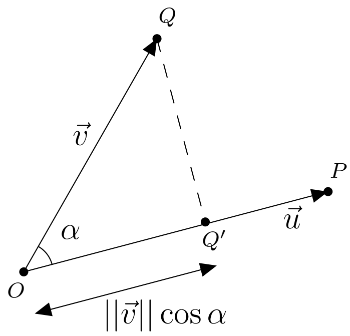


Figura 2.5

Seja Q' a projeção ortogonal de Q na reta OP.

Assim,

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OQ'}}{||\vec{v}||}$$

e, consequentemente,

$$\overline{OQ'} = ||\vec{v}||\ \cos\alpha.$$

Sendo $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ'}$ é a projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

Define-se por produto escalar de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ o produto da norma de $\vec{u}$ pela norma da projeção ortogonal de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ e representa-se por $\vec{u}\cdot\vec{v}$. Ou seja,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = ||\vec{u}||\ ||\vec{v}||\ \cos\alpha,$$

sendo α o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

A partir da definição de produto escalar de vetores obtêm-se as seguintes propriedades:

Propriedade 2.2. *Dados os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$;
2. $\vec{u}\cdot\vec{u} = ||\vec{u}||^2$;
3. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$;
4. $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$.

Considere-se um referencial ortonormado $(O,(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n))$ e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, com coordenadas $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ e $(v_1,v_2,\ldots,v_n)$, respetivamente.

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ podem ser representados por

$$\vec{u} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n \quad \text{e} \quad \vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n.$$

Assim,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 + \ldots + u_n\vec{e}_n)\cdot(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + \ldots + v_n\vec{e}_n)$$

e, como $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = 0$ para $i,j \in \{1,\ldots,n\}$, com $i \neq j$, vem

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1) + u_2v_2(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2) + \ldots + u_nv_n(\vec{e}_n\cdot\vec{e}_n).$$

Uma vez que $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_i = 1, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$, tem-se que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \, .$$

2.2 Subconjuntos do plano

Nesta secção apresentam-se alguns subconjuntos do plano definidos à custa de pontos ou de outros conjuntos do plano.

2.2.1 Mediatriz

A Geometria Analítica é iniciada no 10º ano de escolaridade com a introdução do conceito de referencial ortonormado no plano, sendo $A(a_1, a_2)$ a designação utilizada para representar o ponto A de abcissa a_1 e ordenada a_2.

A introdução do conceito de mediatriz implica o conhecimento da determinação da distância entre dois pontos e do ponto médio de um segmento de reta.

Considerem-se os pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$.

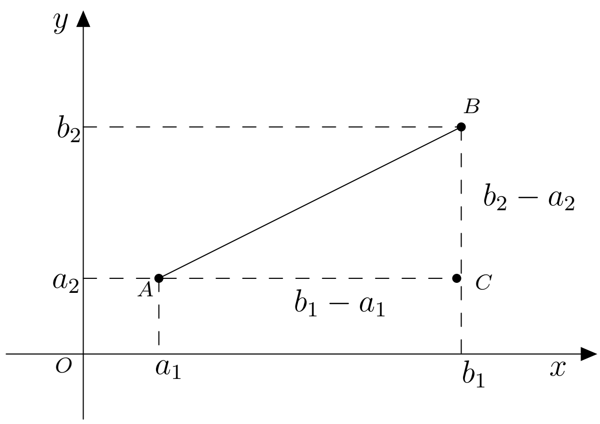


Figura 2.6: Distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^2$

A medida da distância entre os pontos A e B, $\mathrm{d}(A, B)$ ou $\overline{AB}$, pode ser determinada através da aplicação do Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo cujos vértices são os pontos A, B e C, sendo $C(b_1, a_2)$, como se indica na Figura 2.6.

Assim,

$$(\mathrm{d}(A,B))^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2,$$

e, consequentemente

$$\mathrm{d}(A,B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Proposição 2.2. *Dada uma reta numérica e dois pontos A e B de abcissas a e b, respetivamente, a abcissa do ponto médio do segmento de reta de extremos A e B é dada por $\dfrac{a+b}{2}$.*

Demonstração. Considerem-se os pontos A e B de abcissas a e b, respetivamente, e M o ponto médio do segmento $[AB]$.

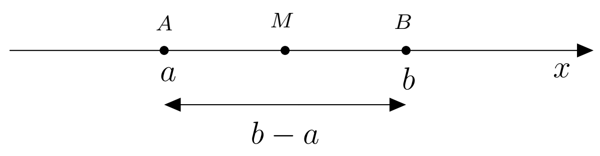


Figura 2.7: Ponto médio de um segmento de reta em $\mathbb{R}$

O comprimento do segmento de reta $[AB]$ é de $b-a$, donde a medida da distância de A ao ponto médio do segmento de reta $[AB]$ é de $\dfrac{b-a}{2}$.

Assim, a abcissa do ponto médio do segmento é de

$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

$\square$

Proposição 2.3. *Dado um plano munido de um referencial ortonormado e dados dois pontos $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$, as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AB]$ são*

$$\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right).$$

Demonstração. Considerem-se os pontos A e B de coordenadas (a_1, a_2) e (b_1, b_2), respetivamente. Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$ de coordenadas (m_1, m_2).

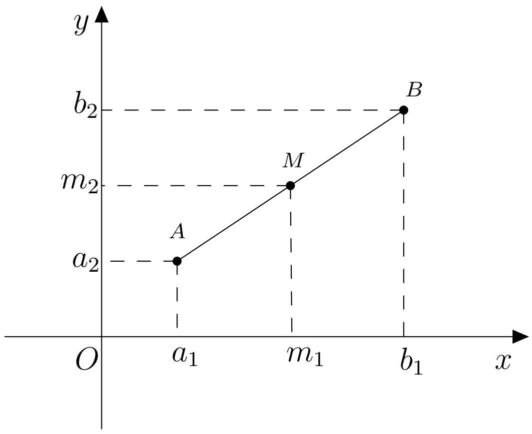


Figura 2.8: Ponto médio de um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$

Aplicando o Teorema de Tales [2],

$$\frac{\overline{AM}}{m_1 - a_1} = \frac{\overline{MB}}{b_1 - m_1}.$$

Sendo M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$, $\overline{AM} = \overline{MB}$, donde,

$$m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \Leftrightarrow m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Do mesmo modo,

$$\frac{\overline{AM}}{m_2 - a_2} = \frac{\overline{MB}}{b_2 - m_2}.$$

Assim,

$$m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}.$$

Pode assim concluir-se que as coordenadas do ponto M, ponto médio do segmento $[AB]$, são

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}\right).$$

□

Definição 2.1. *Designa-se por mediatriz de um segmento de reta o conjunto de todos os pontos do plano que são equidistantes das extremidades desse segmento.*

[2]Teorema de Tales: Se duas retas são secantes a um conjunto de retas paralelas, então a razão entre os comprimentos de dois segmentos de reta quaisquer de uma delas é igual à razão entre os comprimentos dos segmentos de reta correspondentes da outra.

Considere-se o segmento de reta $[AB]$, em que as coordenadas de A e de B são, respetivamente, (a_1, a_2) e (b_1, b_2). Seja P um ponto genérico, de coordenadas (x, y), que se encontra à mesma distância de A e de B, ou seja, $\mathrm{d}(A, P) = \mathrm{d}(B, P)$.

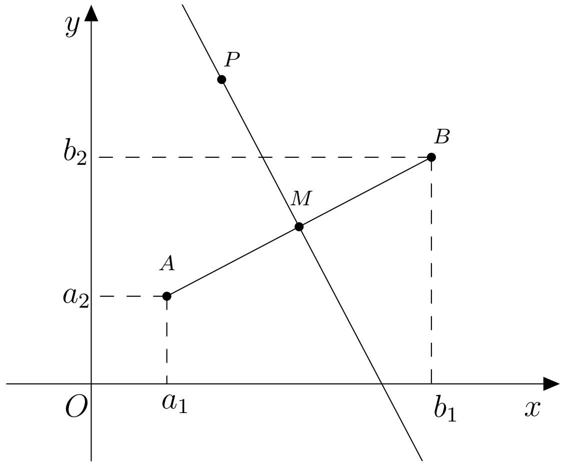


Figura 2.9: Mediatriz de um segmento de reta

Se $\mathrm{d}(A, P) = \mathrm{d}(B, P)$ vem

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}.$$

Como

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \geq 0 \wedge (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2 \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

resulta

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2.$$

Assim, a equação da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é dada pela expressão

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2.$$

O desenvolvimento dos quadrados dos binómios e posterior simplificação dos termos semelhantes levará à equação reduzida da mediatriz na forma $y = mx + b$.

2.2.2 Circunferência, círculo e elipse

Definição 2.2. *Dado um ponto $A(a_1, a_2)$ pertencente a um plano e um número real positivo r, dá-se o nome de circunferência de centro A e raio r ao conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano cuja distância a A é igual a r.*

Considere-se o ponto $A(a_1, a_2)$, centro de uma circunferência, e um ponto $P(x, y)$ genérico, pertencente à circunferência. Seja r o raio da circunferência.

Assim,

$$\mathrm{d}(A, P) = r,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = r \Leftrightarrow (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2,$$

uma vez que $(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

A equação reduzida da circunferência de centro A e raio r é dada pela expressão

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 = r^2.$$

Definição 2.3. *Chama-se círculo ao conjunto de todos os pontos do plano que pertencem a uma circunferência ou ao interior desta.*

Ou seja, um ponto pertence a um círculo se a distância desse ponto ao centro da circunferência que o limita é menor ou igual ao raio, donde se conclui que

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 \leq r^2$$

é a condição que define o círculo de centro A e raio r.

Definição 2.4. *Dados dois pontos A e B, fixos, pertencentes a um plano, designa-se por elipse o conjunto de pontos, P, do plano tais que $d(P, A) + d(P, B) = k$, em que k é um valor constante superior a $d(A, B)$. Os pontos A e B designam-se por focos da elipse e o ponto médio do segmento $[AB]$ por centro da elipse.*

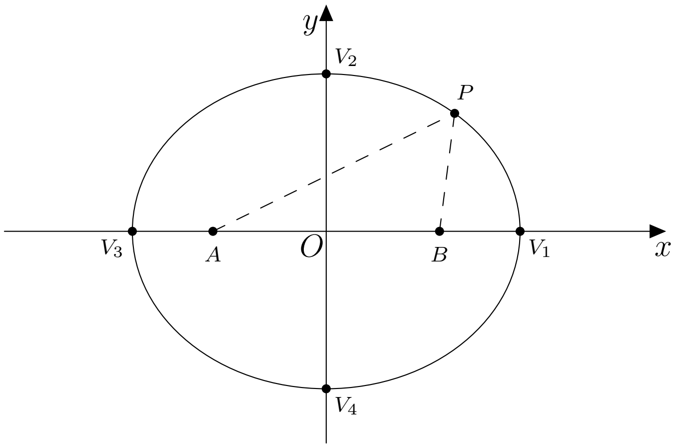


Figura 2.10: Representação gráfica da elipse

Os pontos de interseção da elipse com os seus eixos de simetria, na Figura 2.10 representados por V_1, V_2, V_3 e V_4, são designados por vértices da elipse. Os vértices opostos de uma elipse definem os seus eixos; neste caso, o segmento de reta $[V_1, V_3]$ é o eixo maior da elipse e o segmento de reta $[V_2, V_4]$ é o eixo menor.

Designe-se por a o comprimento do semieixo de simetria que se encontra sobre o eixo coordenado Ox, por b o comprimento do semieixo que se encontra sobre o eixo coordenado Oy e por c a distância de cada foco ao centro da elipse, como se ilustra na Figura 2.11.

Sendo $A(a_1, a_2)$ e $B(b_1, b_2)$ os focos da elipse, considere-se $C(c_1, c_2)$ um ponto pertencente à elipse, sobre o eixo maior.

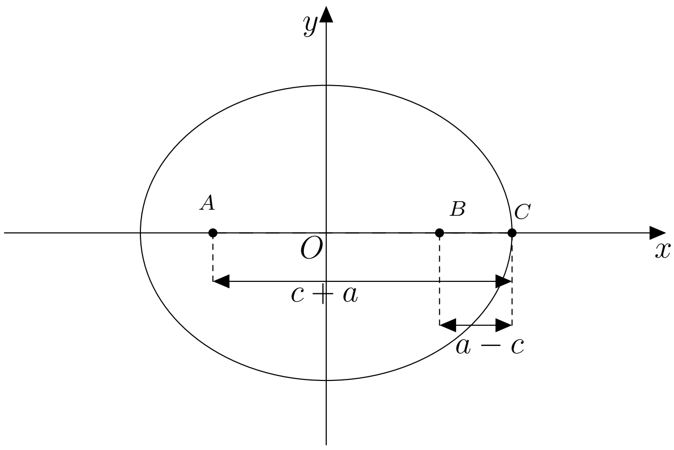


Figura 2.11: Eixo maior e distância focal

Por definição de elipse,

$$\mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(B, C) = k,$$

ou seja,

$$c + a + a - c = k,$$

donde

$$2a = k.$$

Seguindo um raciocínio análogo numa elipse cujo eixo maior é paralelo ao eixo Oy, concluir-se-ia que, nessa situação, $2b = k$.

Assim, em qualquer elipse, a soma das distâncias de um ponto da elipse aos seus focos é igual ao eixo maior da elipse.

Considere-se uma elipse de centro $(0, 0)$ e de focos $A(a_1, 0)$ e $B(b_1, 0)$.

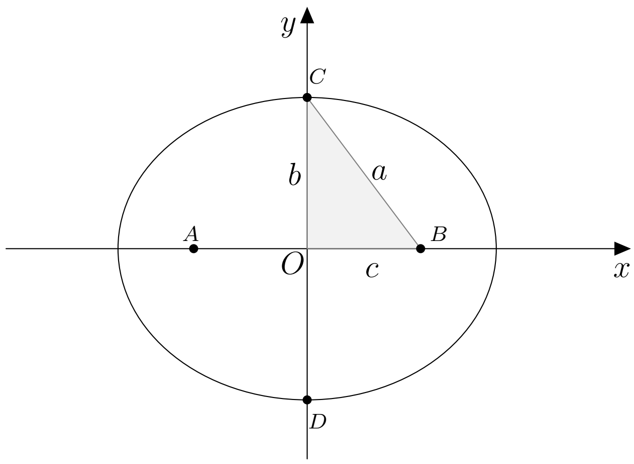


Figura 2.12: Medidas de eixos e distância focal

Uma vez que o centro da elipse é o ponto médio do segmento $[AB]$, a sua mediatriz vai coincidir com o eixo Oy, intersetando a elipse em dois pontos, C e D. Uma vez que o ponto C pertence à elipse, $\mathrm{d}(A, C) + \mathrm{d}(B, C) = 2a$; por outro lado, o ponto C pertence à mediatriz do segmento $[AB]$, donde $\overline{AC} = \overline{BC}$. Pode assim concluir-se que $\overline{CB} = a$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras vem

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.1}$$

Seguindo um raciocínio análogo numa elipse cujo eixo maior é paralelo ao eixo coordenado Oy, concluir-se-ia que, para essa situação,

$$b^2 = a^2 + c^2. \tag{2.2}$$

Partindo da definição de elipse e utilizando a condição (2.1) ou (2.2), chegar-se-ia à equação reduzida da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se uma elipse de centro na origem sofrer uma translação segundo um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ o seu centro passa a ser o ponto P. Considerando (x_0, y_0) as coordenadas do ponto P, a equação reduzida da elipse é dada pela expressão

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

No ensino secundário apenas são estudadas elipses centradas na origem com eixo maior sobre o eixo coordenado Ox.

2.3 Subconjuntos do espaço

Nesta secção pretende definir-se os conceitos de plano mediador, superfície esférica e esfera.

2.3.1 Plano mediador

Sejam $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ dois pontos do espaço.

Para se poder determinar a distância entre estes dois pontos, construa-se um prisma retangular de modo a que o segmento de reta $[AB]$ seja a diagonal espacial desse prisma.

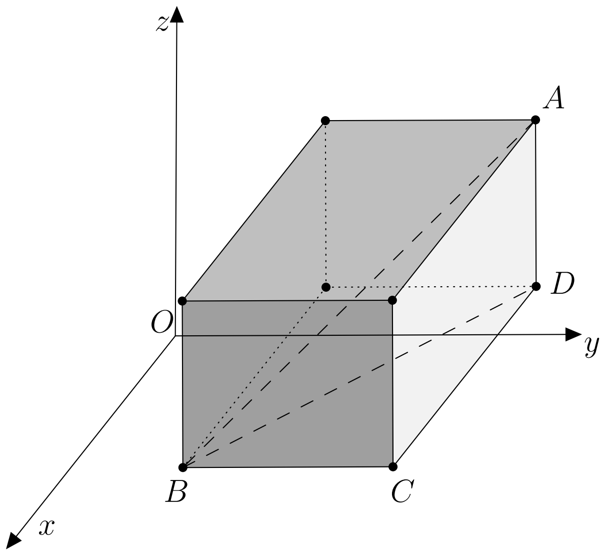


Figura 2.13: Distância entre dois pontos no espaço

Os pontos C e D representados têm de coordenadas (b_1, a_2, b_3) e (a_1, a_2, b_3), respetivamente. Pode ainda concluir-se que

$$\mathrm{d}(C, D) = |b_1 - a_1|\,;$$

$$\mathrm{d}(B, C) = |b_2 - a_2|\,;$$

$$\mathrm{d}(A, D) = |b_3 - a_3|\,.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[BCD]$ vem

$$(\mathrm{d}(B, D))^2 = (\mathrm{d}(C, D))^2 + (\mathrm{d}(B, C))^2,$$

ou seja,

$$(\mathrm{d}(B, D))^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[ABD]$ obtém-se

$$(\mathrm{d}(A, B))^2 = (\mathrm{d}(B, D))^2 + (\mathrm{d}(A, D))^2,$$

ou seja,

$$(\mathrm{d}(A, B))^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2.$$

Assim, a distância entre dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}.$$

Definição 2.5. *Dados dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ do espaço, designa-se por plano mediador do segmento de reta $[AB]$ o conjunto de pontos do espaço equidistantes de A e de B.*

Considerem-se assim dois pontos $A(a_1, a_2, a_3)$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ e um ponto genérico $P(x, y, z)$ pertencente ao plano mediador de $[AB]$. Por definição de plano mediador, tem-se que

$$\mathrm{d}(A, P) = \mathrm{d}(B, P),$$

donde resulta

$$\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2} = \sqrt{(x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2}.$$

Como

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \geq 0 \wedge (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2 \geq 0,$$

então,

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2.$$

Assim, a equação do plano mediador do segmento de reta $[AB]$ é dada pela expressão

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = (x - b_1)^2 + (y - b_2)^2 + (z - b_3)^2.$$

O desenvolvimento dos quadrados dos binómios e posterior simplificação dos termos semelhantes levará o estudante à equação do plano mediador na forma $ax + by + cz + d = 0$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

2.3.2 Superfície esférica e esfera

Definição 2.6. *Dado um ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e um número real positivo r, dá-se o nome de superfície esférica de centro A e raio r ao conjunto de pontos $P(x, y, z)$ do espaço cuja distância* *de A é igual a r.*

Por definição de superfície esférica, e estendendo a $\mathbb{R}^3$ o que foi feito na subsecção 2.2.2 para a circunferência em $\mathbb{R}^2$, chega-se à equação reduzida da superfície esférica de centro A e raio r,

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 = r^2.$$

Sendo a esfera o conjunto de todos os pontos do espaço que pertencem a uma superfície esférica ou ao interior desta, a sua equação reduzida pode ser dada pela expressão

$$(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2 + (z - a_3)^2 \leq r^2.$$

2.4 Equações da reta e do plano

Nesta secção pretende deduzir-se diferentes formas de representação de retas, no plano e no espaço, e de planos no espaço.

2.4.1 Equações da reta

Seja r uma reta que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e paralela ao vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

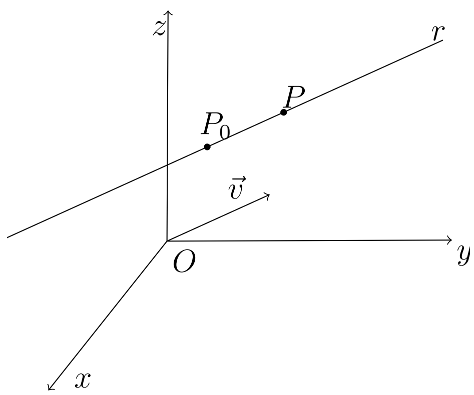


Figura 2.14: Reta em $\mathbb{R}^3$

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico contido na reta r.

Assim, o ponto P está contido na reta r se e só se o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$, ou seja,

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = \alpha\vec{v}.$$

Donde,

$$P = P_0 + \alpha\vec{v}, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Esta última equação é designada por equação vetorial da reta.

A partir da equação (2.3) obtêm-se as designadas equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha v_1 \\ y - y_0 = \alpha v_2 \\ z - z_0 = \alpha v_3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Resolvendo as equações (2.4) em ordem a α, obtêm-se as equações cartesianas da reta r

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

O vetor $\vec{v}$ é designado por vetor diretor da reta r.

Se uma das componentes do vetor $\vec{v}$ for nula, a reta é paralela ao plano coordenado definido pelas outras duas componentes do vetor. Por exemplo, se a primeira coordenada do vetor for nula, a reta é paralela ao plano coordenado yOz.

Se duas das componentes do vetor forem nulas, a reta é paralela ao eixo coordenado definido pela componente não nula do vetor. Por exemplo, se $v_1 = v_2 = 0$, então a reta é paralela ao eixo coordenado Oz. Se uma reta é paralela ao eixo coordenado Oz e contém um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ então pode ser definida pelas condições $x = x_0 \wedge y = y_0$.

Particularizando para $\mathbb{R}^2$, uma reta r que contém um ponto P_0 e $\vec{v}(v_1, v_2)$ é um seu vetor diretor, pode ser representada pela equação vetorial

$$r : P = P_0 + \alpha\vec{v}, \alpha \in \mathbb{R},$$

obtendo-se a partir desta equação as equações paramétricas da reta:

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Para $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$ tem-se que

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2},$$

donde

$$y - y_0 = \frac{v_2}{v_1}(x - x_0),$$

em que $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ é designado por declive da reta r. Geometricamente, o declive de uma reta é a tangente do ângulo definido pela reta e o eixo Ox.

Assim, uma reta não paralela ao eixo Oy pode ser definida pela sua equação reduzida,

$$y = mx + b,$$

em que $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ e $b = y_0 - mx_0$.

Se uma reta é paralela ao eixo Oy então todos os pontos nela contidos têm a mesma abcissa; ou seja, se a reta contém o ponto $P_0(x_0, y_0)$, então qualquer ponto da reta é do tipo (x_0, y), donde a sua equação é dada por $x = x_0$.

Se uma reta é paralela ao eixo Ox e passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0)$, a sua equação é dada por $y = y_0$.

Proposição 2.4. *Duas retas não paralelas aos eixos coordenados são perpendiculares entre si se e só se o produto dos respetivos declives for* -1.

Demonstração. Sejam r_1 e r_2 duas retas perpendiculares entre si, não paralelas aos eixos coordenados, de declives m_1 e m_2, respetivamente. Seja θ o ângulo formado pela reta r_1 com o eixo Ox. Assim, $m_1 = \operatorname{tg}(\theta)$ e considere-se $m_2 = \operatorname{tg}(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Tem-se que:

$$m_2 = \operatorname{tg}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \frac{\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2})}{\cos(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} = -\frac{1}{m_1}.$$

Donde,

$$m_1\, m_2 = -1.$$

□

2.4.2 Equações do plano

Dados três pontos P_0, P_1 e P_2 não colineares de $\mathbb{R}^3$ existe um único plano α que os contém.

Considerem-se os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$. Uma vez que os três pontos considerados são não colineares, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes.

Sendo P um ponto genérico de α, o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

$$\exists! \lambda, \beta \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{P_0P} = \lambda\vec{u} + \beta\vec{v},$$

donde resulta

$$P = P_0 + \lambda\vec{u} + \beta\vec{v}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

que é designada equação vetorial do plano que contém o ponto P_0 e é definido pelas direções de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Considerando $P(x, y, z)$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, à semelhança do que foi feito para a equação da reta na secção 2.4.1, obtêm-se as equações paramétricas do plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \beta v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \beta v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \beta v_3 \end{cases}, \lambda, \beta \in \mathbb{R}.$$

Considere-se agora um plano α de $\mathbb{R}^3$ que contém o ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e que é perpendicular ao vetor não nulo $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Um ponto $P(x, y, z)$ pertence a α se e só se $\overrightarrow{P_0P}$ é perpendicular a $\vec{v}$, ou seja, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{v} = 0$ e, como tal, resulta $(P - P_0) \cdot \vec{v} = 0$.

Ou ainda,

$$(x - x_0).v_1 + (y - y_0).v_2 + (z - z_0).v_3 = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - d = 0,$$

com $a = v_1, b = v_2, c = v_3$ e $d = x_0v_1 + y_0v_2 + z_0v_3$.

A equação

$$ax + by + cz - d = 0 \tag{2.5}$$

é designada por equação cartesiana do plano α, em que (a, b, c) são as coordenadas de um vetor normal ao plano α.

No caso de um plano ser paralelo a um dos planos coordenados, a equação (2.5) simplifica-se. Se um plano é paralelo ao plano coordenado xOy, por exemplo, pode ser definido unicamente pela condição $z = z_0$, em que z_0 é a coordenada das cotas dos pontos que contém.

2.5 Domínios planos

Designa-se por domínio plano um conjunto de pontos do plano.

Uma reta r de equação cartesiana $x = c$ determina dois semiplanos abertos, de equações $x > c$ e $x < c$, ou dois semiplanos fechados, de equações $x \geq c$ e $x \leq c$. Estes semiplanos designam-se por semiplano à direita e semiplano à esquerda de r (abertos ou fechados).

Seguem-se alguns exemplos de domínios planos:

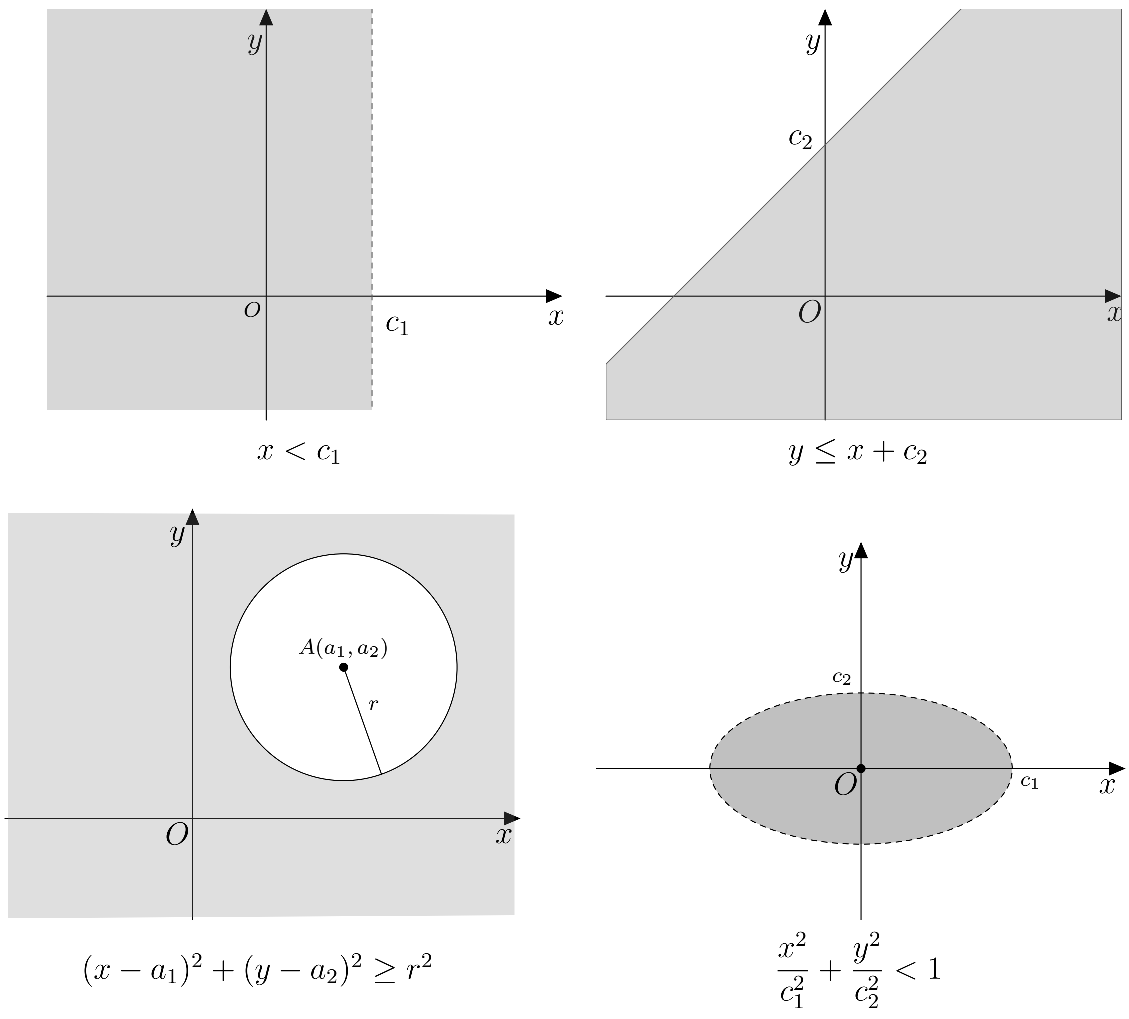


Figura 2.15: Exemplos de domínios planos

Capítulo 3

Implementação do Software

Neste capítulo faz-se referência aos *softwares* e plataformas utilizados na criação dos recursos digitais e os principais passos para a concretização dos mesmos. São ainda apresentados os exercícios criados.

3.1 Plataformas e softwares utilizados

Para a criação dos recursos digitais recorreu-se à plataforma *SageMath* uma vez que "contempla computação algébrica, numérica e tem capacidades gráficas"[26]. O *software* utilizado é designado por MEGUA, "um pacote *open source* que permite gerar automaticamente exercícios parametrizados e a respetiva resolução, em linguagem tipográfica LaTeX, recorrendo à linguagem de programação *Python* e com acesso às bibliotecas do *SageMath*"[6]. Os recursos criados estão disponíveis na plataforma SIACUA, da Universidade de Aveiro, que consiste numa plataforma de exercícios de várias unidades curriculares da área da Matemática presentes em cursos do ensino superior, secundário e básico. Para cada curso existe um índice com informações e exercícios sobre o assunto a estudar e uma área de estudo autónomo. A área de estudo autónomo é um sistema de aprendizagem aberto, em que cada utilizador tem acesso ao seu progresso, com questões tipo verdadeiro/falso do PmatE (Projecto Matemática Ensino) [23] e questões de escolha múltipla do Projeto MEGUA.

Apesar de ser inquestionável a importância dos programas de geometria dinâmica para a descoberta e compreensão de relações e propriedades geométricas, este trabalho não engloba a sua utilização. O que se pretende é que os recursos digitais criados sejam um suporte ao estudo para consolidação e auto-avaliação de conhecimentos.

3.2 Como criar um exercício

Uma página de trabalho do *SageMath* é constituída por células. Para criar um exercício de escolha múltipla parametrizado utilizando o pacote de *software* MEGUA, e que se pretende que mais tarde seja exportado para a plataforma SIACUA, é necessário a utilização de três células. Na primeira célula deve constar a seguinte informação:

Tabela 3.1: Folha de trabalho do *SageMath* - 1ª célula

```
# auto
from megua.all import *
meg = MegBookWeb('/home/nbuser/mp2013web.sqlite')
```

Com estas instruções é carregado o pacote MEGUA e as suas funções e é aberta a base de dados que contém os exercícios criados.

A segunda célula permite a exportação do exercício para a plataforma SIACUA e nela devem constar as seguintes informações:

Tabela 3.2: Folha de trabalho do *SageMath* - 2ª célula

```
meg.siacua(
exname="97G40_ Exemplo",
ekeys=[0,1,2,3,4,5,6,7,8,9],
sendpost=True,course="matsec",
usernamesiacua="f100")
```

Nesta célula é apresentado o nome do exercício, em que 97G40 designa o código MSC (*Mathematical Subject Classification*) em que ele é enquadrado. Neste exemplo, e nos exercícios criados no âmbito desta dissertação, 97G40 significa *Plane and solid geometry*. São ainda dadas as chaves, *ekeys*, das parametrizações que estarão disponíveis na plataforma SIACUA, o curso a que se destinam e o *username* do utilizador que exporta os exercícios para a referida plataforma. Cada chave representa uma parametrização única do exercício.

Na terceira célula é onde é desenvolvido o exercício propriamente dito, da qual se destacam as seguintes informações:

Tabela 3.3: Folha de trabalho do *SageMath* - 3ª célula

Instrução	**Descrição**
meg.save(r”’	Dá-se início ao exercício
%SUMMARY	Breve descrição do exercício
SIACUAstart level=1; slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3 concepts = [(4332, 0.7), (4342, 0.3)] SIACUAend	É apresentada a lista de conceitos contemplados no exercícios e o seu peso na concretização do mesmo. No exemplo, 4332 e 4342 são códigos dos conceitos que correspondem a subtópicos da Geometria Analítica, apresentados no capítulo anterior.
%PROBLEM	Título e enunciado do exercício
%ANSWER	Dá-se início ao corpo da resposta
<multiplechoice> <center> <choice> vresposta </choice> <choice> errada1 </choice> <choice> errada2 </choice> <choice> errada3 </choice> </center> </multiplechoice>	Bloco de escolha múltipla. No desenvolvimento do exercício a resposta correta é sempre a primeira. No entanto, quando o exercício é gerado na plataforma SIACUA, a posição da resposta correta é aleatória.
Texto que corresponde à resolução	É apresentada a resolução detalhada do exercício que conduz à resposta correta.
class E97G40_Exemplo	Nome do exercício
def make_random(s): s.a1= s.a2=	São definidos os parâmetros presentes no enunciado do problema.
def solve(s): s.b1=s.a1 + s.a2	São declarados os parâmetros auxiliares necessários para a resolução do problema.
”’)	Indica o fim do exercício.

O enunciado do exercício e o corpo da resposta são escritos em LaTeX, com recurso ao pacote TikZ, e alguns comandos em HTML. As funções *make_random* e *solve* são escritas em linguagem de programação *Python*.

Depois de finalizado, é gerado um ficheiro HTML, em que os parâmetros surgem concretizados de acordo com uma determinada chave.

Apresentam-se, como exemplo, duas parametrizações do mesmo exercício:

Tabela 3.4: Enunciado do exercício E97G40_posicao_rel_R2_022, $ekey = 0$

Considere, num referencial o.n. Oxy, as retas r e s de equações $$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{6} \quad \text{e} \quad s : y = -9x - 7\,.$$ Qual a posição relativa das duas retas?

Tabela 3.5: Enunciado do exercício E97G40_posicao_rel_R2_022, $ekey = 83$

Considere, num referencial o.n. Oxy, as retas r e s de equações $$r : \frac{x-2}{-6} = \frac{y+2}{3} \quad \text{e} \quad s : y = 2x + 2\,.$$ Qual a posição relativa das duas retas?

Este exercício pretende levar o estudante a uma das quatro respostas: "coincidentes", "estritamente paralelas", "perpendiculares" ou "concorrentes não perpendiculares", consoante os valores tomados pelos parâmetros. Poderiam ter-se elaborado quatro exercícios distintos, condicionando os valores parametrizados de modo a que cada um apenas pudesse ter uma única resposta correta; no entanto, a criação de um único exercício que engloba os quatro casos foi mais desafiante e para a sua concretização foi necessário o seguinte código:

%SUMMARY Equações da reta e do plano; Equações da reta

```
Neste exercício são dadas duas equações de duas retas e pretende
determinar-se a posição relativa entre elas. Todos os valores
presentes nas equações das retas são parametrizados, o que leva
a quatro resoluções diferentes: quando as retas são estritamente
paralelas, paralelas coincidentes, perpendiculares ou
concorrentes não perpendiculares.

Palavras chave: Equações cartesianas da reta,
equação reduzida da reta, posição relativa de retas
```

```
SIACUAstart
level=1;  slip= 0.2; guess=0.25; discr = 0.3
concepts = [(4315, 0.1),(4323,0.5), (4324, 0.2), (4342,0.2)]
SIACUAend
```

%PROBLEM Posição relativa de retas

```
Considere, num referencial o.n. $Oxy$, as retas $r$ e $s$ de equações
<showone enunciado>
<thisone 0>
$$r:\frac{x sgn_a1 mod_a1}{v1} = \frac{ysgn_a2 mod_a2}{v2}
  \quad \mbox{e} \quad   s:y=sgn_a3 mod_a3 x sgn_a4 mod_a4$$
</thisone>

<thisone 1>
$$r:x sgn_a1 mod_a1= \frac{y sgn_a2 mod_a2}{v2}
  \quad \mbox{e} \quad   s:y=sgn_a3 mod_a3 x sgn_a4 mod_a4$$
</thisone>

<thisone 2>
$$r:\frac{x sgn_a1 mod_a1}{v1}=y sgn_a2 mod_a2 \quad \mbox{e} \quad
s:y=sgn_a3 mod_a3 x sgn_a4 mod_a4$$
</thisone>

<thisone 3>
$$r:x sgn_a1 mod_a1=y sgn_a2 mod_a2 \quad \mbox{e} \quad
s:y=sgn_a3 mod_a3 x sgn_a4 mod_a4$$
</thisone>
</showone> <p>

Qual a posição relativa das duas retas?
```

Houve necessidade de elaborar quatro enunciados diferentes para distinguir os casos em que os denominadores das frações presentes na equação cartesiana da reta r tomam o valor 1. Cada um dos enunciados encontra-se entre os comandos *thisone* e */thisone* e a sua escolha depende do valor tomado pela variável *enunciado*. Esta variável, nesta situação, pode tomar os valores $0, 1, 2$ ou 3, dependendo dos valores tomados pelos denominadores das referidas frações.

%ANSWER

```
<multiplechoice>
<center>
<choice>  vresposta  </choice>
<choice>  errada1 </choice>
<choice>  errada2 </choice>
```

```
<choice>  errada3
</choice>
</center>
</multiplechoice>

 Resolução: As equações cartesianas de uma reta podem ser da forma
    $$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}$$
em que $(x_0,y_0)$ são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e
$(v_1,v_2)$ as coordenadas de um seu vetor diretor.<p>
Da equação da reta $r$ podemos obter o vetor $v_r(v1,v2)$ como
 vetor diretor.<p>
A equação reduzida de uma reta é da forma $y=mx+b$, em que $m$
 representa o declive da reta e $b$ a ordenada na origem. <p>
A equação da reta $s$ permite-nos saber que o seu
 declive é $a3$, donde, um seu vetor diretor pode ser $v_s(1,a3)$.<p>
 Para se estudar a posição relativa entre duas retas basta estudar a
 posição relativa entre os vetores diretores de cada uma das retas.<p>
 Comecemos por verificar se os dois vetores são colineares, ou seja, se
 existe $k \in \mathbb{R}$ tal que
$$v_r=k.v_s \Leftrightarrow (v1,v2)=k (1,a3)$$
Donde,<p>
$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle v1=k \\
\displaystyle v2=a3k \\
\end{array} \right.$
$\Leftrightarrow$
$\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle k=v1 \\
\displaystyle k=b1 \\
\end{array} \right.$
<p>
<showone escolha>
<thisone 0>
Uma vez que os vetores diretores das retas são colineares, resta saber se
 as retas são coincidentes ou estritamente paralelas.<p>
Da equação da reta $r$ sabe-se que o ponto $(a1,a2)$ lhe pertence. Se
 esse ponto também pertencer à reta $s$, então as retas são coincidentes.
 Para se verificar se o ponto pertence à reta $s$ basta substituir as suas
 coordenadas na equação da reta:
        $$a2=a3 \times a1@() sgn_a4 mod_a4$$
        $$a2=b2$$
 Pode assim concluir-se que o ponto $(a1,a2)$ pertence às duas retas, e
 por isso são coincidentes.
</thisone>
<thisone 1>
Uma vez que os vetores diretores das retas são colineares, resta saber se
 as retas são coincidentes ou estritamente paralelas.<p>
Da equação da reta $r$ sabe-se que o ponto $(a1,a2)$ lhe pertence. Se
```

```
esse ponto também pertencer à reta $s$, então as retas são coincidentes.
Para se verificar se o ponto pertence à reta $s$ basta substituir as suas
coordenadas na equação da reta:
        $$a2=a3 \times a1@() sgn_a4 mod_a4$$
        $$a2=b2$$
Pode assim concluir-se que o ponto $(a1,a2)$ não pertence às duas retas e
por isso não são coincidentes, são estritamente paralelas.
<p>
</thisone>
<thisone 2>
Uma vez que os vetores diretores das retas não são colineares, as retas
não são paralelas.<p>
As retas são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores
diretores for nulo.<p>
Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:
\begin{eqnarray*}
(v1,v2).(1,a3)&=& v1\times 1+v2@()\times a3@() \\
&=& v1 sgn_c2 mod_c2\\
&=& c3 \\
\end{eqnarray*}

Podemos então concluir que as retas são perpendiculares.
</thisone>

<thisone3>
Uma vez que os vetores diretores das retas não são colineares, as retas
não são paralelas.<p>
<p>
As retas são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores
diretores for nulo.
<p>
Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:
\begin{eqnarray*}
(v1,v2).(1,a3)&=& v1\times 1+v2@()\times a3@() \\
&=& v1 sgn_c2 mod_c2\\
&=& c3 \\\
\end{eqnarray*}
Podemos então concluir que as retas também não são perpendiculares.<p>
Assim, as retas são concorrentes não perpendiculares.
</thisone>
</showone>
```

Durante a resolução do exercício houve novamente recurso aos comandos *thisone* e */thisone*. Entre estes pares de comandos encontram-se quatro resoluções diferentes, que levam às quatro respostas possíveis, dependendo dos valores tomados pelos parâmetros.

Programação

```
class E97G40_posicao_rel_ret_R2_022(Exercise):

        def make_random(s):
                s.a1=ur.iunif(-10,10)
                s.a2=ur.iunif(-10,10)
                s.a3=ur.iunif_nonset(-10,10, [0])
                s.a4=ur.iunif(-10,10)
                s.v1=ur.iunif_nonset(-10,10, [0])
                s.v2=ur.iunif_nonset(-10,10, [0])

        def solve(s):
                s.b1=s.v2/s.a3
                s.b2=s.a3*s.a1+s.a4
                s.c1=s.a1*s.a3
                s.c2=s.v2*s.a3
                s.c3=s.v1+s.c2
                s.mod_a1=abs(s.a1)
                if s.a1<0:
                        s.sgn_a1=r'+'
                else:
                        s.sgn_a1=r'-'
                if s.a1==0:
                        s.sgn_a1= " "
                        s.mod_a1= " "
                s.mod_a2=abs(s.a2)
                if s.a2<0:
                        s.sgn_a2=r'+'
                else:
                        s.sgn_a2=r'-'
                if s.a2==0:
                        s.sgn_a2= " "
                        s.mod_a2= " "
                s.mod_a3=abs(s.a3)
                if s.a3<0:
                        s.sgn_a3=r'-'
                else:
                        s.sgn_a3=r' '
                if s.mod_a3==1:
                        s.mod_a3=' '
                s.mod_a4=abs(s.a4)
                if s.a4<0:
                        s.sgn_a4=r'-'
                else:
                        s.sgn_a4=r'+'
                if s.a4==0:
                        s.sgn_a4= " "
                        s.mod_a4= " "
```

```
        s.mod_c2=abs(s.c2)
        if s.c2<0:
            s.sgn_c2=r'-'
        else:
            s.sgn_c2=r'+'
        s.mod_c3=abs(s.c3)
        if s.c3<0:
            s.sgn_c3=r'-'
        else:
            s.sgn_c3=r'+'

        #Resolucoes
        s.escolha=0
        s.vresposta=u'coincidentes'
        s.errada1=u'estritamente paralelas'
        s.errada2=u'perpendiculares'
        s.errada3=u'concorrentes nao perpendiculares'
        if (s.b1==s.v1):
            if (s.a2<>s.b2):
                s.escolha=1
                s.vresposta=u'estritamente paralelas'
                s.errada1='coincidentes'
                s.errada2='perpendiculares'
                s.errada3=u'concorrentes nao perpendiculares'
        if (s.b1<>s.v1):
            if (s.c3==0):
                s.escolha=2
                s.vresposta='perpendiculares'
                s.errada1=u'estritamente paralelas'
                s.errada2='coincidentes'
                s.errada3=u'concorrentes nao perpendiculares'
            else:
                s.escolha=3
                s.vresposta=u'concorrentes nao perpendiculares'
                s.errada1=u'estritamente paralelas'
                s.errada2='perpendiculares'
                s.errada3='coincidentes'


        s.enunciado=0
        if s.v1==1:
            s.enunciado=1
        if s.v2==1:
            s.enunciado=2
        if s.v1==1:
            if s.v2==1:
                s.enunciado=3
```

Neste último campo, que diz respeito à programação, foram declaradas as variáveis presentes no enunciado, as variáveis necessárias para a resolução do exercício, assim como as hipóteses de respostas de escolha múltipla. Como exemplo, $s.a2 = ur.iunif(-10, 10)$ significa que a variável $a2$ pode tomar todos os valores inteiros no intervalo $[-10, 10]$; $s.v1 = ur.iunif\_nonset(-10, 10, [0])$ significa que a variável $v1$ pode tomar todos os valores inteiros no intervalo $[-10, 10]$, com exceção do 0, uma vez que é um denominador de uma fração.

Como se pode verificar, a produção de um exercício pode ser bastante extensa.

Posteriormente o exercício é enviado para o SIACUA. Depois de registado, o utilizador seleciona o curso e tem acesso aos tópicos disponíveis para estudo. A cada tópico está associado uma barra de progressos representativa do seu desempenho nesse domínio.

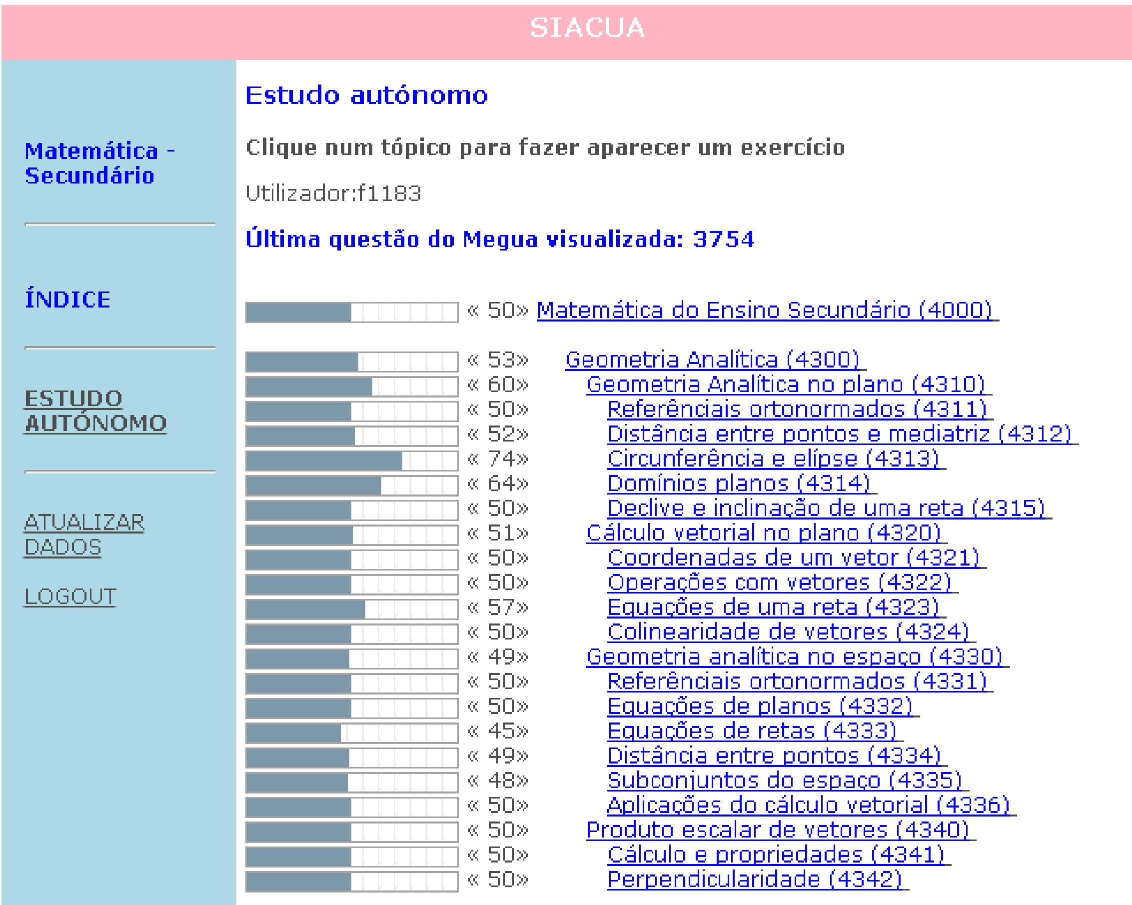
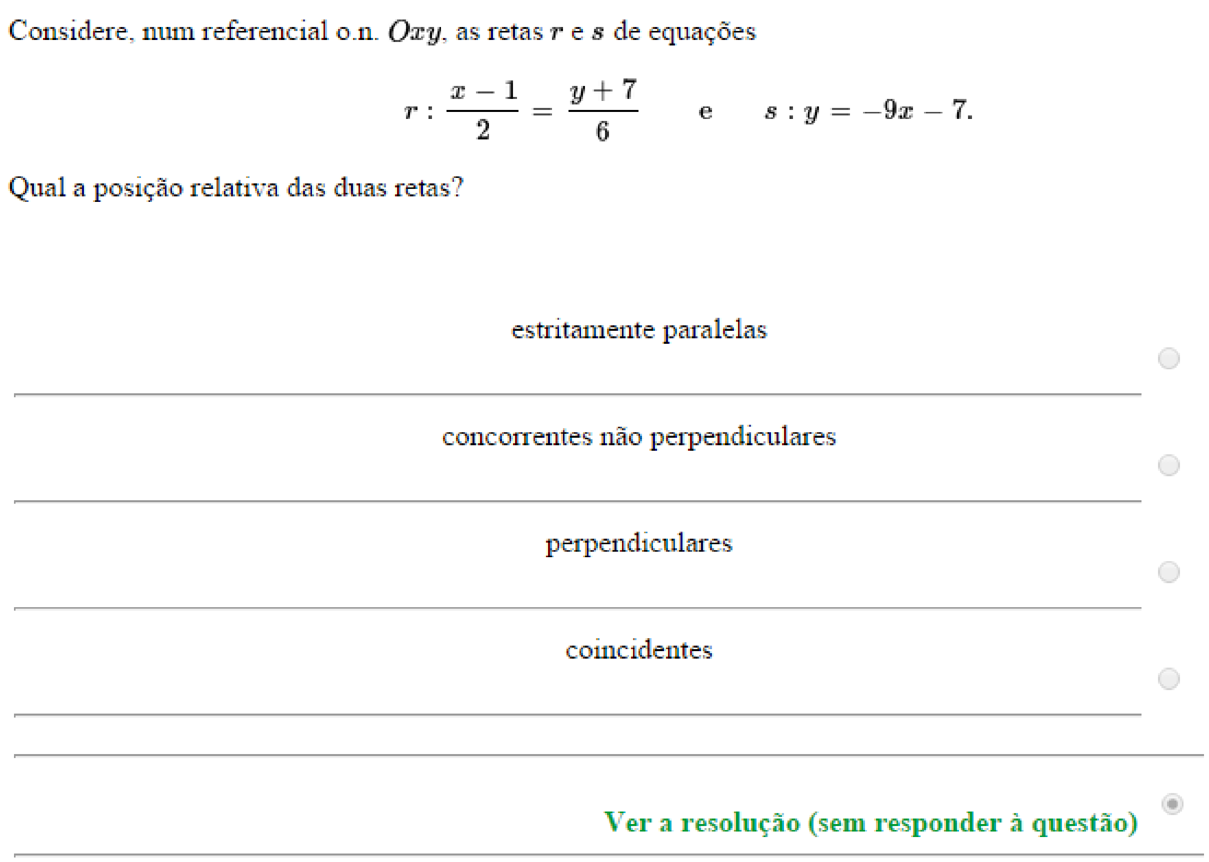


Figura 3.1: SIACUA - Barras de progresso

O exercício apresentado como exemplo com $ekey = 0$ surgirá ao estudante como se apresenta na imagem seguinte:



Considere, num referencial o.n. Oxy, as retas r e s de equações

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{6} \qquad \text{e} \qquad s : y = -9x - 7.$$

Qual a posição relativa das duas retas?

estritamente paralelas

concorrentes não perpendiculares

perpendiculares

coincidentes

Ver a resolução (sem responder à questão)

Figura 3.2: SIACUA - Enunciado do exercício E97G40_posicao_rel_R2_022, $ekey = 0$

O estudante pode tentar responder ou ver a resolução do exercício sem apresentar uma resposta. Quando pretendido, é apresentada a resolução que leva à resposta correta.

As duas imagens que se seguem foram obtidas diretamente do site siacua.web.ua.pt.; uma corresponde à resolução do exercício com a chave de parametrização $ekey = 0$ e a outra à chave $ekey = 83$. De reparar que a estrutura das resoluções é a mesma mas leva a respostas diferentes.

Resolução:

Resolução: Das equações equações cartesianas de uma reta na forma

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

sabe-se que (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2) as coordenadas de um vetor diretor.

Da equação da reta r podemos obter o vetor $v_r(2, 6)$ como vetor diretor.

A equação reduzida de uma reta é da forma $y = mx + b$, em que m representa o declive da reta e b a ordenada na origem.

Como o declive da reta s é -9, conclui-se que um seu vetor diretor é $v_s(1, -9)$.

Para se estudar a posição relativa entre duas retas basta estudar a posição relativa entre os vetores diretores de cada delas.

Verifique-se se os dois vetores são colineares, ou seja, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_r = k\ v_s \Leftrightarrow (2, 6) = k(1, -9).$$

Donde,

$$\begin{cases} 2 = k \\ 6 = -9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Uma vez que o sistema é impossível, os vetores diretores das retas não são colineares, logo as retas não são paralelas.

As retas são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores diretores for nulo.

Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:

$$(2, 6) \cdot (1, -9) = 2 \times 1 + 6 \times \left(-9\right) = 2 - 54 = -52,$$

donde se conclui que as retas também não são perpendiculares.

Assim, as retas são concorrentes não perpendiculares.

Figura 3.3: SIACUA - Resolução do exercício E97G40_posicao_rel_R2_022, $ekey = 0$

Resolução:

Resolução: Das equações equações cartesianas de uma reta na forma

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

sabe-se que (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2) as coordenadas de um vetor diretor.

Da equação da reta r podemos obter o vetor $v_r(-6, 3)$ como vetor diretor.

A equação reduzida de uma reta é da forma $y = mx + b$, em que m representa o declive da reta e b a ordenada na origem.

Como o declive da reta s é 2, conclui-se que um seu vetor diretor é $v_s(1, 2)$.

Para se estudar a posição relativa entre duas retas basta estudar a posição relativa entre os vetores diretores de cada delas.

Verifique-se se os dois vetores são colineares, ou seja, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_r = k\ v_s \Leftrightarrow (-6, 3) = k(1, 2).$$

Donde,

$$\begin{cases} -6 = k \\ 3 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ k = \dfrac{3}{2} \end{cases}.$$

Uma vez que o sistema é impossível, os vetores diretores das retas não são colineares, logo as retas não são paralelas.

As retas são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores diretores for nulo.

Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:

$$(-6, 3) \cdot (1, 2) = -6 \times 1 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0,$$

donde se conclui que as retas são perpendiculares.

Figura 3.4: SIACUA - Resolução do exercício E97G40_posicao_rel_R2_022, $ekey = 83$

Capítulo 4

Apresentação dos Exercícios criados

Do tópico Geometria Analítica, como referenciado anteriormente, distinguiram-se quatro subtópicos que foram estruturados para o modelo do SIACUA.

De acordo com o modelo desenvolvido no SIACUA, o domínio de conhecimento foi decomposto hierarquicamente em três níveis [10]:

- Conceitos Base (C), no nível de maior detalhe;
- Temas (T), que representam uma agregação de certos 'Conceitos', no nível médio;
- Assunto (A), que, no caso desta dissertação, é Geometria Analítica, no nível mais generalista.

Na Tabela 4.1 apresenta-se o 'Assunto' Geometria Analítica, os 'Temas' envolvidos neste assunto, os 'Conceitos' relacionados com cada tema e os exercícios (identificados pelo nome na programação) que podem surgir em cada conceito. Cada exercício pode envolver vários conceitos, no entanto, não fica disponível ao utilizador em todos eles, fica apenas no conceito que tem o código numérico superior, de acordo com a referida tabela. Desta forma, é estabelecida uma ordem que permite ao estudante progredir sequencialmente nos temas. Contudo, este esquema influencia a avaliação, oferecida pela rede Bayesiana, para cada um dos vários conceitos envolvidos.

Tabela 4.1: Tópicos e exercícios criados

4300 Geometria Analítica	
4310 Geometria analítica no plano	
4311 Referenciais ortonormados	Ex_020, Ex_021
4312 Distância entre pontos e mediatriz	Ex_001, Ex_002, Ex_006
4313 Circunferência e elipse	Ex_003, Ex_005
4314 Domínios planos	Ex_004, Ex_026
4315 Declive e inclinação de uma reta	Ex_009, Ex_010, Ex_022, Ex_027
4320 Cálculo vetorial no plano	
4321 Coordenadas de um vetor	Ex_021
4322 Operações com vetores	Ex_007, Ex_009, Ex_018
4323 Equações da reta	Ex_003, Ex_004, Ex_010, Ex_026
4324 Colinearidade de vetores	Ex_022, Ex_30, Ex_027
4330 Geometria analítica no espaço	
4331 Referenciais ortonormados	Ex_023
4332 Equações de planos	Ex_024, Ex_31
4333 Equações da reta	Ex_011, Ex_013, Ex_015, Ex_028
4334 Distância entre pontos	Ex_025
4335 Subconjuntos do espaço	Ex_017, Ex_019, Ex_029
4336 Aplicações do cálculo vetorial	Ex_012, Ex_014, Ex_016
4340 Produto escalar de vetores	
4341 Cálculo e propriedades	Ex_007, Ex_008, Ex_009
4342 Perpendicularidade	Ex_014, Ex_022, Ex_024, Ex_028

Apresenta-se de seguida uma concretização de cada exercício criado. Para cada um é feita uma breve descrição, é apresentado o enunciado de uma concretização e a respetiva resolução. É de salientar que a opção correta de resposta é sempre a primeira, no entanto, e como referido anteriormente, quando o utilizador tem acesso ao exercício, na plataforma SIACUA, a resposta correta surge numa posição aleatória.

De referir ainda que algumas explicações presentes nas várias resoluções podem parecer repetitivas, mas são consideradas pertinentes para a compreensão de cada um dos exercícios.

4.1 Tópico 4310 - Geometria analítica no plano

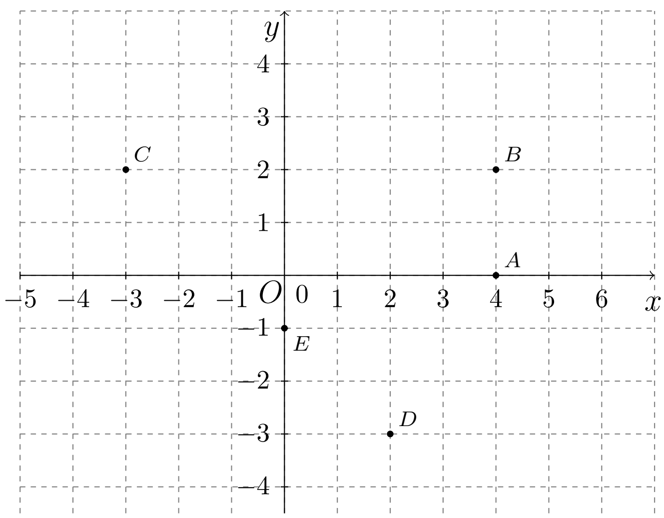
Para este tópico foram criados os exercícios que se apresentam de seguida.

EXERCÍCIO: E97G40_referencias_R2_020

Descrição sumária do exercício: Neste exercício pretende identificar-se as coordenadas de pontos num referencial ortonormado. O gráfico foi inicialmente feito utilizando o software *Geogebra* e exportado para linguagem TikZ. As coordenadas dos pontos foram posteriormente parametrizadas de modo a que os pontos mantenham o quadrante ou o eixo coordenado onde estão contidos.

Enunciado:

Considere os pontos A, B, C, D e E representados no referencial que se segue:



As suas coordenadas são:

- ☐ $A(4,0)$; $B(4,2)$; $C(-3,2)$; $D(2,-3)$; $E(0,-1)$
- ☐ $A(0,4)$; $B(4,2)$; $C(-3,2)$; $D(2,-3)$; $E(-1,0)$
- ☐ $A(4,0)$; $B(2,4)$; $C(2,-3)$; $D(-3,2)$; $E(0,-1)$
- ☐ $A(0,4)$; $B(2,4)$; $C(2,-3)$; $D(-3,2)$; $E(-1,0)$

Proposta de resolução:

Qualquer ponto do plano pode ser identificado por um par de números reais (x, y), designado por coordenadas. A coordenada x é designada por abcissa e representa a distância do ponto ao eixo das ordenadas; a coordenada y é designada por ordenada e representa a distância do ponto ao eixo das abcissas.

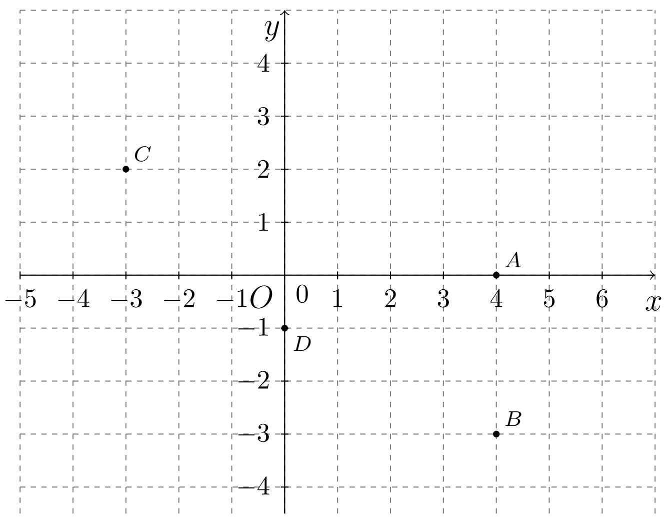
Assim, a resposta correta é $A(4,0)$; $B(4,2)$; $C(-3,2)$; $D(2,-3)$; $E(0,-1)$.

EXERCÍCIO: E97G40_coordenadas_vetor_R2_021

Descrição sumária do exercício: Dados pontos marcados num referencial cartesiano, pretende determinar-se as coordenadas de vetores. À semelhança do exercício anterior, o gráfico foi inicialmente feito utilizando o software *Geogebra* e exportado para linguagem TikZ. As coordenadas dos pontos foram posteriormente parametrizadas de modo a que os pontos mantenham o quadrante ou o eixo coordenado onde estão contidos.

Enunciado:

Considere os pontos A, B, C e D representados no referencial que se segue:



Determine as coordenadas dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$.

- ☐ $\overrightarrow{AB} = (0,-3)$; $\overrightarrow{CD} = (3,-3)$
- ☐ $\overrightarrow{AB} = (4,-3)$; $\overrightarrow{CD} = (2,-2)$
- ☐ $\overrightarrow{AB} = (0,-3)$; $\overrightarrow{CD} = (-3,3)$
- ☐ $\overrightarrow{AB} = (4,-3)$; $\overrightarrow{CD} = (-3,3)$

Proposta de resolução:

Qualquer ponto do plano pode ser identificado por um par de números reais (x, y), designado por coordenadas. A coordenada x é designada por abcissa e representa a distância do ponto ao eixo das ordenadas; a coordenada y é designada por ordenada e e representa a distância do ponto ao eixo das abcissas.

Assim, as coordenadas dos pontos são

$$A(4,0); \quad B(4,-3); \quad C(-3,2); \quad D(0,-1)\,.$$

O vetor $\overrightarrow{AB}$ pode ser definido pela diferença entre B e A, ou seja,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A\\ &= (4,-3)-(4,0)\\ &= (4-4,-3-0)\\ &= (0,-3)\,.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, podem determinar-se as coordenadas do vetor $\overrightarrow{CD}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= D - C\\ &= (0,-1)-(-3,2)\\ &= (0-(-3)\,,-1-2)\\ &= (3,-3)\,.\end{aligned}$$

A resposta correta é, então, $\overrightarrow{AB} = (0, -3)$ e $\overrightarrow{CD} = (3, -3)$.

EXERCÍCIO: E97G40_distancia_pontos_R2_001

Descrição sumária do exercício: Neste exercício pretende determinar-se a distância entre dois pontos dados. Os valores parametrizados são as coordenadas de ambos os pontos, não tendo sido necessário o estabelecimento de qualquer condição. Ao nível da programação, a única dificuldade que surgiu foi durante a resolução do exercício, uma vez que os parâmetros poderiam tomar valores negativos e surgirem incorreções na escrita do tipo $- -5$, entretanto resolvida com o comando "var@()", que transforma -5 em (-5).

Enunciado:

Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(-4, 2)$ e $B(-10, -3)$. A distância entre os dois pontos é:

- ☐ $\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{61}$
- ☐ $\mathrm{d}(A, B) = 2\sqrt{61}$
- ☐ $\mathrm{d}(A, B) = -6$
- ☐ $\mathrm{d}(A, B) = 61$

Proposta de resolução:

A distância entre dois pontos A e B, de coordenadas (a_1, a_2) e (b_1, b_2), respetivamente, é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}.$$

Assim, a distância entre os dois pontos dados é

$$\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{(-10 - (-4))^2 + (-3 - 2)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{61}\,.$$

A resposta correta é $\mathrm{d}(A, B) = \sqrt{61}$.

EXERCÍCIO: E97G40_mediatriz_R2_002

Descrição sumária do exercício: Neste exercício determina-se a equação reduzida da mediatriz de um segmento de reta, em que as coordenadas das suas extremidades são valores parametrizados. Na resolução do exercício surgiu a necessidade de analisar três situações distintas: quando os pontos têm a mesma abcissa, quando os pontos têm a mesma ordenada e quando os pontos não têm coordenadas em comum. Estas três situações distintas implicam, não só três resoluções diferentes, mas também três conjuntos de escolhas múltiplas diferentes. Ao nível da programação foram utilizados vários comandos: como fazer surgir a resolução correta consoante os valores dos parâmetros e respetivas escolhas múltiplas e a criação de variáveis auxiliares que permitam uma correta escrita matemática no que diz respeito à simplificação de sinais, caso os parâmetros tomem valores negativos.

Enunciado:

Considere, num referencial ortonormado xOy, os pontos $A(-10, 5)$ e $B(2, -7)$.

A equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$ é:

- ☐ $y = x + 3$
- ☐ $y = 12x - 12$
- ☐ $y = -12x$
- ☐ $x = 12y$

Proposta de resolução:

A mediatriz de um segmento de reta $[AB]$ é o conjunto de pontos que se encontram à mesma distância de A e de B.

Assim, para um ponto genérico $P(x, y)$ pertencente à mediatriz do segmento de reta, tem-se que

$$\mathrm{d}(A, P) = \mathrm{d}(B, P),$$

ou seja,

$$\sqrt{(x-(-10))^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-7))^2}\ .$$

Uma vez que $(x-(-10))^2 + (y-5)^2 \geq 0 \wedge (x-2)^2 + (y-(-7))^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, a condição anterior é equivalente a

$$(x+10)^2 + (y-5)^2 = (x-2)^2 + (y+7)^2\ .$$

O desenvolvimento dos quadrados dos binómios e a simplificação dos termos semelhantes leva à equação reduzida da mediatriz:

$$\begin{aligned} & x^2 + 20x + 100 + y^2 - 10y + 25 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 14y + 49 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\ & 24x - 24y + 72 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = x + 3\ . \end{aligned}$$

Assim, a resposta correta é $y = x + 3$.

EXERCÍCIO: E97G40_mediatriz_R2_006

Descrição sumária do exercício: Dados três pontos, pretende determinar-se um parâmetro k, presente numa coordenada de um dos pontos, de modo que um desses pontos pertença à mediatriz do segmento de reta formado pelos outros dois. Todas as coordenadas são parametrizadas, à exceção de uma que é nula. A parametrização das coordenadas foi feita de modo a que a resposta correta seja a coordenada de um dos pontos.

Enunciado:

Considere os pontos de coordenadas $A\,(-2, k+2)$, $B(0,-7)$ e $C\,(-11, 2)$, com $k \in \mathbb{R}$.

O(s) valor(es) de k para o(s) qual(is) C pertence à mediatriz de $[AB]$ é(são):

- ☐ $k = \pm 11$
- ☐ $k = \pm 2$
- ☐ $k = 11$
- ☐ $k = 9$

Proposta de resolução:

Pretende-se que o ponto C pertença à mediatriz do segmento $[AB]$, isto é,

$$\mathrm{d}(A, C) = \mathrm{d}(B, C).$$

Ou seja,

$$\sqrt{(-11-(-2))^2 + (2-(k+2))^2} = \sqrt{(-11-0)^2 + (2-(-7))^2}\,.$$

Uma vez que $(-11-(-2))^2 + (2-(k+2))^2 \geq 0 \wedge (-11-0)^2 + (2-(-7))^2 \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, a condição anterior é equivalente a

$$(-11+2)^2 + (2-(k+2))^2 = (-11)^2 + (2+7)^2\,.$$

Donde,

$$(-9)^2 + k^2 = 11^2 + 9^2 \Leftrightarrow k^2 = 11^2 \Leftrightarrow k = \pm 11\,.$$

A resposta correta é então $k = \pm 11$.

EXERCÍCIO: E97G40_circunferencia_R2_003

Descrição sumária do exercício: Pretende-se com este exercício que o estudante, dada a equação de uma circunferência, determine as equações das retas que lhe são tangentes e, simultaneamente, paralelas aos eixos coordenados. Tanto as coordenadas do centro da circunferência, como o valor do raio, são valores parametrizados, podendo uma das coordenadas do centro da circunferência ser um número racional.

Enunciado:

Considere, num referencial ortonormado xOy, a circunferência de equação

$$(x+5)^2 + (y+10)^2 = 9\,.$$

Qual das equações define uma reta tangente à circunferência?

- ☐ $x = -8$
- ☐ $y = -8$
- ☐ $y = -2$
- ☐ $x = -7$

Proposta de resolução:

O enunciado apresenta-nos uma equação de uma circunferência de centro $(-5, -10)$ e de raio $r = \sqrt{9} = 3$.

Existem quatro retas tangentes a esta circunferência que são retas paralelas aos eixos coordenados.

Duas das retas são paralelas ao eixo Ox e têm equações:

$$y = -10 - 3 \Leftrightarrow y = -13; \quad y = -10 + 3 \Leftrightarrow y = -7.$$

As outras duas retas são paralelas ao eixo Oy e têm equações:

$$x = -5 - 3 \Leftrightarrow x = -8; \quad x = -5 + 3 \Leftrightarrow x = -2.$$

Assim, a resposta correta é $x = -8$.

EXERCÍCIO: E97G40_elipse_R2_005

Descrição sumária do exercício: Pretende-se com este exercício que o estudante determine uma equação reduzida da elipse, centrada na origem, sabendo as coordenadas de um foco e as coordenadas de um ponto que lhe pertence e que se encontra sobre o eixo das ordenadas. As coordenadas dos pontos são parametrizadas, não tendo sido necessário condicionar os valores parametrizados para a concretização do exercício. As imagens foram inicialmente criadas no software *Geogebra* e exportadas em linguagem TikZ.

Enunciado:

Considere uma elipse centrada na origem.

Sabe-se que:

- as coordenadas de um dos seus focos são $(-3, 0)$;
- o ponto $P(0, 3)$ pertence à elipse.

A equação reduzida da elipse é:

- ☐ $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
- ☐ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1$
- ☐ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
- ☐ $\dfrac{x^2}{3\sqrt{2}} + \dfrac{y^2}{3} = 1$

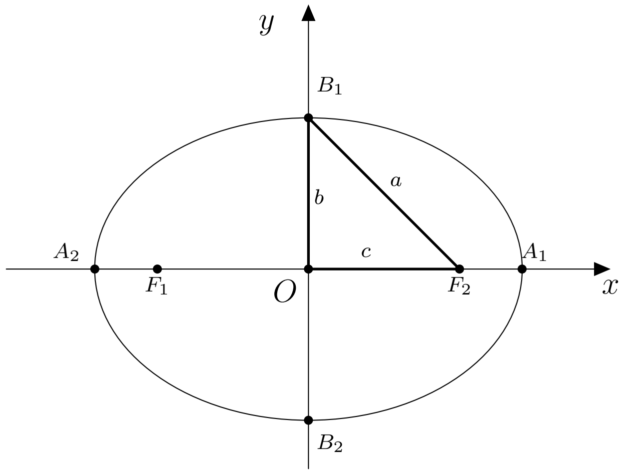
Proposta de resolução:

A equação reduzida de uma elipse centrada na origem é da forma

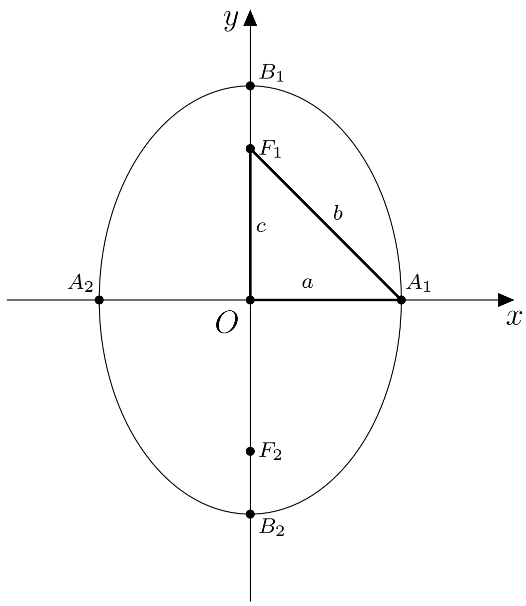
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que a é a medida do semieixo que se encontra sobre o eixo das abcissas e b é a medida do semieixo que se encontra sobre o eixo das ordenadas.

Podem ocorrer duas situações distintas:



Os focos pertencem a Ox e $a > b$



Os focos pertencem a Oy e $a < b$

Designam-se por vértices os pontos de interseção da elipse com os eixos coordenados, representados nas imagens por A_1, A_2, B_1, B_2.

Da definição de elipse sabe-se ainda que o valor do parâmetro a, quando o seu eixo horizontal é maior que o vertical, é igual ao comprimento do segmento de reta que une um dos focos a um dos vértices da elipse que se encontra sobre o eixo das ordenadas. Quando o eixo vertical é maior que o eixo horizontal, o valor do parâmetro b é igual à distância de um dos focos a um dos vértices da elipse que se encontra sobre o eixo das abcissas.

$\overline{F_1F_2}$ é a distância focal, isto é, a distância entre os dois focos.

Como o ponto $(-3, 0)$ é um dos focos da elipse e está contido no eixo Ox, pode deduzir-se que o seu eixo maior está também sobre o eixo Ox, correspondendo assim à primeira situação.

Uma vez que o ponto $(0, 3)$ é um dos vértices da elipse e $b = 3$, resulta $b^2 = 3^2 = 9$.

Sendo $c = 3$ a semi-distância focal, aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 3^2 + 3^2 = 18,$$

o que permite escrever a equação correta da elipse:

$$\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

EXERCÍCIO: E97G40_angulo_retas_R2_009

Descrição sumária do exercício: Pretende determinar-se o ângulo formado entre duas retas, sendo dada uma equação vetorial de uma das reta e a equação reduzida da outra. Todos os valores apresentados são parametrizados. Os diferentes valores que o parâmetro m, número racional, pode tomar, leva à determinação de um possível vetor diretor da reta de diferentes formas, tendo sido feita uma resolução diferente do exercício para cada uma delas. Foi utilizado o comando "gcd(a,b)", "*greatest common divisor*", para a simplificação de frações.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. xOy, as retas r e s, definidas, respetivamente, por:

$$r : (x, y) = (7, -5) + k(2, 1), k \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s : y = -\frac{4}{3}x - 5\,.$$

Qual a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas duas retas (valor arredondado às unidades)?

- ☐ 100º
- ☐ −80º
- ☐ 99º
- ☐ −81º

Proposta de resolução:

O ângulo formado por duas retas é o ângulo formado pelos seus vetores diretores.

Seja $\vec{u}$ um vetor diretor da reta r, $\vec{v}$ um vetor diretor da reta s e α o ângulo formado pelas duas retas.

Da definição de produto escalar vem que

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}.$$

Assim, é necessário determinar as coordenadas de vetores que sejam vetores diretores de cada uma das retas, para posterior cálculo das suas normas.

Da equação vetorial da reta r, tem-se que $(2,1)$ podem ser as coordenadas de $\vec{u}$.

Da equação reduzida da reta s sabe-se que o seu declive é $-\frac{4}{3}$, donde um vetor diretor da reta pode ser $(-3,4)$. Assim,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2,1)\cdot(-3,4) = 2\times(-3) + 1\times 4 = -6+4 = -2.$$

Como

$$||\vec{u}|| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

e

$$||\vec{v}|| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$

é possível agora determinar o ângulo formado pelos dois vetores:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||}\\
&= \frac{-2}{\sqrt{5}\times 5}\\
&= \frac{-2}{5\sqrt{5}}\\
&= -\frac{2}{25}\sqrt{5}\,.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{25}\sqrt{5}\right) \approx 100^{\text{o}}\,.$$

EXERCÍCIO: E97G40_dominios_planos_R2_004

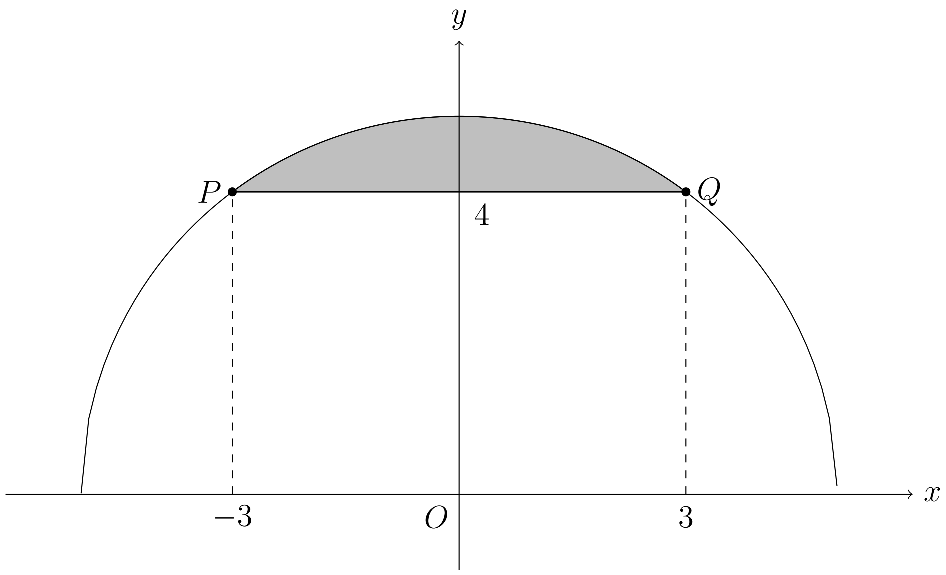
Descrição sumária do exercício: Neste exercício pretende usar-se o conceito de domínio plano. As coordenadas dos pontos são parametrizadas, de modo a que tenham abcissas simétricas e a mesma ordenada. O valor do raio depende dos valores que as coordenadas dos pontos tomam. A dificuldade na concretização deste exercício deveu-se, essencialmente, à construção do gráfico, nomeadamente ao sombreado existente entre duas funções. O pacote Tikz ajudou na tarefa.

Enunciado:

Na figura está representado, num referencial o.n. xOy, uma semicircunferência de centro na origem e que passa nos pontos P e Q.

O ponto P tem coordenadas $(-3, 4)$ e o ponto Q tem coordenadas $(3, 4)$.

Na figura, também está representado o segmento de reta $[PQ]$.



Qual das condições seguintes define o domínio plano sombreado?

- ☐ $x^2 + y^2 \leq 25 \quad \wedge \quad y \geq 4$
- ☐ $x^2 + y^2 \leq 25 \quad \wedge \quad -3 \leq x \leq 3$
- ☐ $x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad -3 \leq x \leq 3$
- ☐ $x^2 + y^2 \leq 9 \quad \wedge \quad y \geq 4$

Proposta de resolução:

A equação de uma circunferência é da forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

em que (x_0, y_0) são as coordenadas do centro da circunferência e r é a medida do seu raio.

O centro da semicircunferência representada é a origem do referencial, ou seja, o ponto de coordenadas $(0, 0)$.

O raio da semicircunferência é a distância de um dos pontos P ou Q à origem. Considere-se o ponto Q para medição do raio:

$$r = \mathrm{d}(O, Q) = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Assim, a semicircunferência é parte da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$.

O domínio plano sombreado corresponde aos pontos interiores da circunferência cuja ordenada é superior ou igual a 4. Assim, a condição que a define é:

$$x^2 + y^2 \leq 25 \quad \wedge \quad y \geq 4\ .$$

EXERCÍCIO: E97G40_eq_red_reta_R2_010

Descrição sumária do exercício: Neste exercício apresenta-se a equação reduzida de uma reta e um ponto. Pretende determinar-se a equação reduzida da reta perpendicular à reta dada e que contenha o ponto dado.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. xOy, a reta r de equação $y = -2x - \frac{2}{5}$.

Seja s a reta perpendicular a r que passa no ponto de coordenadas $(2, -5)$.

Qual é a equação reduzida da reta s?

- ☐ $y = \frac{1}{2}x - 6$
- ☐ $y = -\frac{1}{2}x - 4$
- ☐ $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
- ☐ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{2}{5}$

Proposta de resolução:

A equação reduzida da reta s é da forma $y = mx + b$, em que m representa o declive da reta e b a ordenada na origem.

Designe-se por m_r o declive da reta r e por m_s o declive da reta s.

Pela equação reduzida da reta r sabe-se que $m_r = -2$.

Uma vez que as duas retas são perpendiculares, o produto dos seus declives é -1.

Assim,

$$\begin{aligned} & m_r \times m_s = -1 \\ \Leftrightarrow\ & -2 \times m_s = -1 \\ \Leftrightarrow\ & m_s = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Desta forma, a equação da reta s é $y = \frac{1}{2}x + b$ e, como $(2, -5)$ pertence à reta, vem:

$$-5 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow -5 = 1 + b \Leftrightarrow b = -5 - 1 \Leftrightarrow b = -6.$$

Então, a equação reduzida da reta s é

$$y = \frac{1}{2}x - 6\,.$$

EXERCÍCIO: E97G40_posicao_rel_ret_R2_022

Salienta-se que este exercício foi apresentado na secção 3.2, como exemplo do conteúdo das células numa folha de trabalho da plataforma *SageMath*.

Descrição sumária do exercício: Neste exercício são dadas duas equações de duas retas e pretende determinar-se a posição relativa entre elas. Todos os valores presentes nas equações das retas são parametrizados, o que leva a quatro resoluções diferentes: quando as retas são estritamente paralelas, paralelas coincidentes, perpendiculares ou concorrentes não perpendiculares.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. Oxy, as retas r e s de equações

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+7}{6} \quad \text{e} \quad s : y = -9x - 7\,.$$

Qual a posição relativa das duas retas?

- ☐ concorrentes não perpendiculares
- ☐ estritamente paralelas
- ☐ perpendiculares
- ☐ coincidentes

Proposta de resolução:

Das equações cartesianas de uma reta da forma

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$$

sabe-se que (x_0, y_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2) as coordenadas de um vetor diretor.

Da equação da reta r pode obter-se o vetor $v_r(2,6)$ como vetor diretor.

A equação reduzida de uma reta é da forma $y = mx + b$, em que m representa o declive da reta e b a ordenada na origem.

Como o declive da reta s é -9, conclui-se que um seu vetor diretor é $v_s(1,-9)$.

Para se estudar a posição relativa entre duas retas basta estudar a posição relativa entre os vetores diretores de cada uma delas.

Verifique-se se os dois vetores são colineares, ou seja, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_r = k\ .v_s \Leftrightarrow (2,6) = k\ (1,-9)\,.$$

Donde,

$$\left\{\begin{array}{l} 2 = k \\ 6 = -9k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2 \\ k = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right. .$$

Uma vez que o sistema é impossível, os vetores diretores das retas não são colineares, logo as retas não são paralelas.

As retas são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores diretores for nulo.

Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:

$$(2,6)\cdot(1,-9) = 2\times 1 + 6\times(-9) = 2 - 54 = -52\,,$$

donde se conclui que as retas também não são perpendiculares.

Assim, as retas são concorrentes não perpendiculares.

4.2 Tópico 4320 - Cálculo vetorial no plano

Para este tópico foi criado um conjunto de exercícios, alguns dos quais já apresentados na secção anterior. Apresentam-se, de seguida, os exercícios relacionados com o cálculo vetorial no plano, que não foram englobados no tópico “Geometria analítica no plano”.

EXERCÍCIO: E97G40_produto_escalar1_R2_007

Descrição sumária do exercício: Dada a norma de dois vetores e o produto escalar entre eles, pretende determinar-se a sua posição relativa e relacionar essa posição com a soma dos dois vetores. A norma dos vetores é parametrizada e o valor do produto escalar depende dessa parametrização.

Enunciado:

Sabendo que dois vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ têm ambos norma igual a 2 e que $\vec{p} \cdot \vec{q} = -4$, indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- □ $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$
- □ $\vec{p} - \vec{q} = \vec{0}$
- □ $\vec{p} \perp \vec{q}$
- □ O ângulo formado pelos vetores $\vec{p}$ e $\vec{q}$ é agudo

Proposta de resolução:

Por definição de produto escalar, sabe-se que

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = ||\vec{p}|| \; ||\vec{q}|| \; \cos \alpha,$$

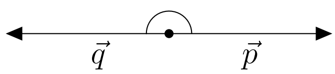
em que α é o ângulo formado pelos dois vetores.

Dos dados do problema tem-se que

$$-4 = 2 \times 2 \times \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = -1\,.$$

Como $\cos \alpha = -1$, conclui-se que o ângulo formado pelos dois vetores é de 180º.

Uma vez que os vetores têm a mesma norma e formam entre si um ângulo de 180º, então são vetores simétricos.



A resposta correta é $\vec{p} + \vec{q} = \vec{0}$.

EXERCÍCIO: E97G40_operacoes_vetores_018

Descrição sumária do exercício: Neste exercício determina-se um vetor resultante de operações entre outros dois vetores. Todos os valores apresentados são parametrizados.

Enunciado:

Em relação a um referencial o.n. $(O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2))$, considere os vetores $\vec{u}(2, -3)$ e $\vec{v} = -10\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$.

Determine as coordenadas de um vetor $\vec{w}$, sabendo que $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

- ☐ $(14, -1)$
- ☐ $(-16, -1)$
- ☐ $(14, 7)$
- ☐ $(24, 4)$

Proposta de resolução:

Sabe-se que $\vec{v} = -10\vec{e}_1 - 5\vec{e}_2$, ou seja, $\vec{v}(-10, -5)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= 2\vec{u} - \vec{v} \\
&= 2(2, -3) - (-10, -5) \\
&= (2 \times 2, 2 \times (-3)) - (-10, -5) \\
&= (4, -6) - (-10, -5) \\
&= (4 + 10, -6 + 5) \\
&= (14, -1)\,.
\end{aligned}$$

As coordenadas de $\vec{w}$ são $(14, -1)$.

EXERCÍCIO: E97G40_col_vet_R2_30

Descrição sumária do exercício: Dadas as coordenadas de três vetores, pretende verificar-se se existem ou não vetores colineares. As coordenadas dos vetores são valores parametrizados.

Enunciado:

Considere os vetores $\vec{u}(5,-10), \vec{v}(10,-4)$ e $\vec{w}(5,-2)$. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.

- ☐ Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares
- ☐ Apenas os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares
- ☐ Não existem vetores colineares
- ☐ Os três vetores são colineares

Proposta de resolução: Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{u} = k\vec{v},$$

ou seja,

$$(5,-10) = k(10,-4).$$

Donde,

$$\begin{cases} 5 = 10k \\ -10 = -4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{1}{2} \\ k = \dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são colineares.

Verifique-se de forma análoga se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ são colineares:

$$\vec{u} = k\vec{w} \Leftrightarrow (5,-10) = k(5,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5k \\ -10 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 5 \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são colineares.

Resta agora verificar se os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares:

$$\vec{v} = k\vec{w} \Leftrightarrow (10,-4) = k(5,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = 5k \\ -4 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases}.$$

Como o sistema é possível, conclui-se que os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares.

Assim, a resposta correta é "Os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são colineares.".

4.3 Tópico 4330 - Geometria analítica no espaço

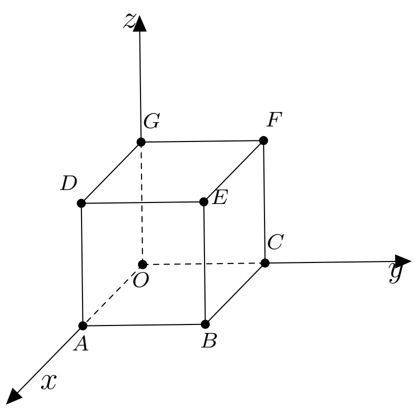
Para este tópico foram criados os exercícios que se apresentam de seguida.

EXERCÍCIO: E97G40_Referencial_R3_023

Descrição sumária do exercício: Dado um cubo representado num referencial o.n., determinam-se as coordenadas dos pontos que são os seus vértices. A medida da aresta é parametrizada e os pontos dos quais são pedidas as coordenadas são escolhidos aleatoriamente. A imagem foi inicialmente feita utilizando o software *Geogebra* e exportada para linguagem TikZ.

Enunciado:

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo de aresta 3. Os pontos A, C e G pertencem aos semieixos positivos.



As coordenadas dos pontos C, E e G são

- ☐ $C(0,3,0)$; $E(3,3,3)$; $G(0,0,3)$
- ☐ $C(0,3,0)$; $E(0,3,0)$; $G(3,0,0)$
- ☐ $C(3,0,0)$; $E(3,3,3)$; $G(0,0,3)$
- ☐ $C(3,0,0)$; $E(0,3,0)$; $G(0,0,3)$

Proposta de resolução:

Uma vez que o ponto C se encontra sobre o eixo das ordenadas, a abcissa e a cota são nulas, logo as suas coordenadas são $(0, 3, 0)$.

Como a aresta do cubo é 3 e o ponto E resulta da interseção dos planos $x = 3$, $y = 3$ e $z = 3$, as suas coordenadas são $(3, 3, 3)$.

Uma vez que o ponto G encontra-se sobre o eixo das cotas, as restantes coordenadas são nulas e por isso as suas coordenadas são $(0, 0, 3)$.

Deste modo,

$$C(0, 3, 0); \quad E(3, 3, 3); \quad G(0, 0, 3).$$

EXERCÍCIO: E97G40_Equacao_plano_024

Descrição sumária do exercício: Neste exercício são dados três pontos e determina-se uma equação cartesiana do plano que os contém. As coordenadas dos pontos são parametrizadas. A imagem apresentada na resolução foi inicialmente feita utilizando o software *Geogebra* e exportada para linguagem TikZ.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos de coordenadas $A(-2, -2, 2)$, $B(-1, -2, 3)$ e $C(4, 2, 2)$.

Determine a equação cartesiana do plano α que contém os três pontos.

- ☐ $-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0$
- ☐ $x + z - 6 = 0$
- ☐ $6x + 4z + 14 = 0$
- ☐ $x = -\frac{3}{2}y = -z$

Proposta de resolução:

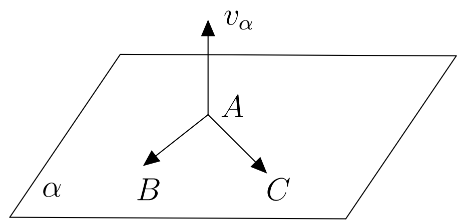
A equação cartesiana de um plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que (a, b, c) são as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Designe-se por α o plano que contém A, B e C e por v_α um vetor normal a α, não nulo.

Uma vez que v_α é perpendicular a α, então é perpendicular aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.



Como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B - A\\ &= (-1,-2,3)-(-2,-2,2)\\ &= (-1-(-2), -2-(-2), 3-2)\\ &= (1,0,1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= C - A\\ &= (4,2,2)-(-2,-2,2)\\ &= (4-(-2), 2-(-2), 2-2)\\ &= (6,4,0)\end{aligned}$$

e sabendo que dois vetores são perpendiculares se e só se o produto escalar entre eles for nulo, vem

$$v_\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \quad \wedge \quad v_\alpha \cdot \overrightarrow{AC} = 0\ .$$

Ou seja,

$$\begin{cases}(x,y,z)\cdot(1,0,1)=0\\ (x,y,z)\cdot(6,4,0)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+z=0\\ 6x+4y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\ y=-\dfrac{3}{2}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-z\\ y=\dfrac{3}{2}z\end{cases},$$

donde, o sistema tem como solução o conjunto de pontos da forma $(-z, \frac{3}{2}z, z)$, com $z \in \mathbb{R}$.

Para $z = 1$, por exemplo, vem

$$x = -1 \quad \text{e} \quad y = -\frac{3}{2} \times (-1) = \frac{3}{2}\,.$$

Assim,

$$v_\alpha = \left(-1, \frac{3}{2}, 1\right)\,.$$

Determine-se agora o parâmetro d da equação geral $ax + by + cz + d = 0$. Para isso, basta substituir (a, b, c) pelas coordenadas do vetor v_α, já determinadas, e as coordenadas do ponto genérico (x, y, z) por um ponto que pertença ao plano.

Usando o ponto A, por exemplo, vem

$$\begin{aligned} & -1 \times (-2) + \frac{3}{2} \times (-2) + 1 \times 2 + d = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 - 3 + 2 + d = 0 \\ \Leftrightarrow\ & d = -1\,. \end{aligned}$$

Obtém-se, assim, uma equação do plano α:

$$-x + \frac{3}{2}y + z - 1 = 0.$$

EXERCÍCIO: E97G40_Eq_plano_31

Descrição sumária do exercício: Dadas as coordenadas de três pontos não colineares, pretende identificar-se qual a equação do plano que os contém. As coordenadas dos pontos são valores parametrizados.

Enunciado:

Considere, num referencial ortonormado $Oxyz$, os pontos $A(-3,-3,-4), B(0,2,2)$ e $C(4,-2,0)$.

Identifique qual a condição que define o plano que contém os três pontos.

- ☐ $(x,y,z)=(-3,-3,-4)+(3,5,6)\lambda+(4,-4,-2)\beta, \quad \lambda,\beta\in\mathbb{R}$
- ☐ $(x,y,z)=(-3,-3,-4)+(0,2,2)\lambda+(4,-2,0)\beta, \quad \lambda,\beta\in\mathbb{R}$
- ☐ $3x+5y+6z+48=0$
- ☐ $(x,y,z)=(3,5,6)+(4,-4,-2)\beta, \quad \beta\in\mathbb{R}$

Proposta de resolução:

A equação vetorial de um plano é da forma

$$P=P_0+\lambda\vec{u}+\beta\vec{v},\ \lambda,\beta\in\mathbb{R},$$

em que P é um ponto genérico do plano, P_0 um ponto do plano e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ definem a sua direção.

Determinem-se as coordenadas de dois vetores que definem a direção do plano que contém os pontos A, B e C:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= B-A\\ &= (0,2,2)-(-3,-3,-4)\\ &= (0-(-3),2-(-3),2-(-4))\\ &= (3,5,6);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= C-B\\ &= (4,-2,0)-(0,2,2)\\ &= (4-0,-2-2,0-2)\\ &= (4,-4,-2).\end{aligned}$$

Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ definem a direção do plano se forem não colineares. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e

$\overrightarrow{BC}$ são colineares se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC},$$

donde,

$$(3,5,6) = k(4,-4,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 4k \\ 5 = -4k \\ 6 = -2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{3}{4} \\ k = -\dfrac{5}{4} \\ k = -3 \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são colineares e, assim, o plano que contém os três pontos pode ser definido pela condição

$$(x,y,z) = (-3,-3,-4) + (3,5,6)\lambda + (4,-4,-2)\beta, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R},$$

a qual surge numa das opções de escolha múltipla.

EXERCÍCIO: E97G40_posicao_retas_planos_015

Descrição sumária do exercício: Neste exercício, dada uma equação da reta, determina-se a sua interseção com um plano coordenado. Todos os valores numéricos apresentados são parametrizados.

Enunciado:

Num referencial o.n. $Oxyz$, considere a reta

$$r : \frac{x+10}{-7} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-2}{-3}.$$

As coordenadas do ponto de interseção da reta r com o plano xOz são:

- ☐ $\left(-\dfrac{22}{5}, 0, \dfrac{22}{5}\right)$
- ☐ $(0,4,0)$
- ☐ $(-10,0,2)$
- ☐ $\left(-\dfrac{78}{5}, 0, -\dfrac{2}{5}\right)$

Proposta de resolução:

Uma vez que o ponto pertence ao plano xOz, a sua ordenada é nula, ou seja, o ponto é da forma $(x, 0, z)$.

Substituindo na equação da reta r a ordenada nula $(y = 0)$, vem

$$\frac{x+10}{-7} = \frac{-4}{5} = \frac{z-2}{-3},$$

donde resulta o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x+10}{-7} = -\dfrac{4}{5} \\ \\ \dfrac{z-2}{-3} = -\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

Resolvendo as equações em ordem a x e a z, obtêm-se as outras duas coordenadas do ponto:

$$\begin{cases} \dfrac{x+10}{-7} = -\dfrac{4}{5} \\ \\ \dfrac{z-2}{-3} = -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+10 = \dfrac{28}{5} \\ \\ z-2 = \dfrac{12}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{22}{5} \\ \\ z = \dfrac{22}{5} \end{cases}.$$

Assim, o ponto de interseção da reta r com o plano xOz tem de coordenadas $\left(-\dfrac{22}{5}, 0, \dfrac{22}{5}\right)$.

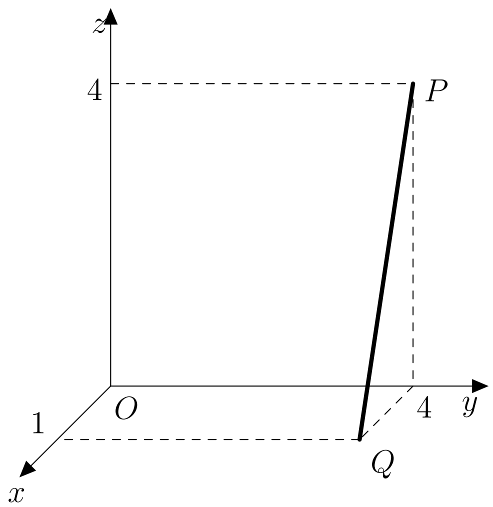
EXERCÍCIO: E97G40_eq_reta_R3_011

Descrição sumária do exercício: Neste exercício apresentam-se dois pontos no espaço e pretende identificar-se as suas coordenadas para posteriormente determinar-se uma equação da reta que contém esses pontos. Apesar de simples resolução, a construção da figura em $\mathbb{R}^3$, com todos os valores parametrizados, foi de complexa concretização.

Enunciado:

Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um segmento de reta $[PQ]$ em que:

- o ponto P pertence ao plano yOz;
- o ponto Q pertence ao plano xOy.



Indique qual das condições seguintes define a reta PQ.

☐ $(x, y, z) = (0, 4, 4) + k(1, 0, -4), k \in \mathbb{R}$

☐ $(x, y, z) = (1, 0, -4) + k(0, 4, 4), k \in \mathbb{R}$

☐ $x = 1 \wedge y = 4 \wedge z = 4$

☐ $x + 4y + 4z = 0$

Proposta de resolução:

A figura permite obter as coordenadas dos dois extremos do segmento de reta: $P(0, 4, 4)$ e $Q(1, 4, 0)$

Uma reta fica definida por um ponto que lhe pertença e por um seu vetor diretor.

A partir dos pontos P e Q, determine-se um vetor diretor:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,4,0) - (0,4,4) = (1-0, 4-4, 0-4) = (1,0,-4)\,.$$

Utilizando o ponto P e o vetor diretor determinado anteriormente é possível escrever uma equação vetorial da reta,

$$(x,y,z) = (0,4,4) + k(1,0,-4), \quad k \in \mathbb{R}$$

a qual surge numa das opções de escolha múltipla.

EXERCÍCIO: E97G40_posicao_rel_ret_R3_2_013

Descrição sumária do exercício: Neste exercício são apresentadas duas condições que definem duas retas no espaço e pretende determinar-se um parâmetro k, presente na condição de uma das retas, de modo a que as retas sejam coincidentes. Todos os valores apresentados são parametrizados. O facto de num exercício estarem presentes muitas expressões algébricas leva a que, tanto no enunciado como na resolução, seja necessária a escrita de várias condições para simplificar as expressões quando os parâmetros tomam o valor 1 (denominadores de frações, coeficientes de x).

Enunciado:

Para um certo número real k, as retas r e s, definidas num referencial o.n. $Oxyz$, pelas condições

$$r: \frac{x-6}{3} = \frac{y+8}{-5} = \frac{z-6}{10} \quad \text{e} \quad s: \frac{x+3}{3} = \frac{y-7}{-5} = \frac{z-k}{10}$$

são coincidentes.

Qual o valor de k?

- ☐ $k = -24$
- ☐ $k = -54$
- ☐ $k = 4$
- ☐ $k = 0$

Proposta de resolução:

Das equações cartesianas da reta na forma

$$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

sabe-se que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2, v_3) as coordenadas de um seu vetor diretor.

Das equações das retas r e s sabe-se que $(3, -5, 10)$ são as coordenadas de um vetor diretor de ambas as retas, concluindo-se desta forma que as mesmas são paralelas.

Para que sejam coincidentes, é necessário garantir que se um ponto pertence a uma reta, também pertence à outra.

O valor do parâmetro k é uma coordenada do ponto $(-3, 7, k)$ que pertence à reta s.

Para o ponto $(-3, 7, k)$ pertencer à reta r tem que verificar as condições que a definem,

$$\frac{x-6}{3}=\frac{y+8}{-5}=\frac{z-6}{10}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{-3-6}{3}=\frac{7+8}{-5}=\frac{k-6}{10} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{-9}{3}=\frac{15}{-5}=\frac{k-6}{10} \\ \Leftrightarrow\quad & -3=-3=\frac{k-6}{10}\,, \end{aligned}$$

donde resulta,

$$\begin{aligned} & k-6=-3\times 10 \\ \Leftrightarrow\quad & k-6=-30 \\ \Leftrightarrow\quad & k=-24\,. \end{aligned}$$

A resposta correta é, então, $k=-24$.

EXERCÍCIO: E97G40_distancia_pontos_R3_025

Descrição sumária do exercício: Neste exercício determina-se a distância entre dois pontos no espaço. Todas as coordenadas dos pontos são parametrizadas.

Enunciado:

Considere num referencial ortonormado $Oxyz$ os pontos $A(-4,-4,-5)$ e $B(-5,-5,-2)$.

A distância entre os dois pontos é:

- ☐ $\mathrm{d}(A,B)=\sqrt{11}$
- ☐ $\mathrm{d}(A,B)=7$
- ☐ $\mathrm{d}(A,B)=\sqrt{7}$
- ☐ $\mathrm{d}(A,B)=11$

Proposta de resolução:

A distância entre dois pontos A e B, de coordenadas (a_1,a_2,a_3) e (b_1,b_2,b_3), respetivamente, é dada pela expressão

$$\mathrm{d}(A,B)=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}\,.$$

Assim, neste caso,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,B)&=\sqrt{(-5-(-4))^2+(-5-(-4))^2+(-2-(-5))^2}\\&=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+3^2}\\&=\sqrt{11}\,.\end{aligned}$$

A resposta correta é, então, $\mathrm{d}(A,B)=\sqrt{11}$.

EXERCÍCIO: E97G40_sup_esferica_017

Descrição sumária do exercício: Neste exercício são dadas a equação de um plano paralelo a xOz e de uma superfície esférica e pretende determinar-se a sua interseção. Todos os valores apresentados são parametrizados. A resolução do exercício depende dos valores tomados pelos parâmetros, levando a três resoluções diferentes: quando a interseção da superfície esférica com o plano é um conjunto vazio, quando é um ponto ou quando é uma circunferência contida no plano dado.

Enunciado:

Num referencial $Oxyz$, considere:

- o plano α, de equação $y = -2$;
- a superfície esférica E, de equação $x^2 + (y+3)^2 + z^2 = 9$.

A interseção da superfície esférica E com o plano α é:

- ☐ uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$
- ☐ um ponto
- ☐ uma circunferência de raio 8
- ☐ um conjunto vazio

Proposta de resolução:

Para se determinar a interseção da superfície esférica dada com o plano $y = -2$, basta substituir na equação da superfície esférica a coordenada y por -2:

$$\begin{aligned} & x^2 + (-2+3)^2 + z^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 1 + z^2 = 9 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + z^2 = 9 - 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + z^2 = 8\,. \end{aligned}$$

Obteve-se uma equação de uma circunferência, contida no plano $y = -2$, de centro $(0, -2, 0)$, em que 8 é o quadrado do seu raio.

Assim, conclui-se que a interseção da superfície esférica E com o plano α é uma circunferência de raio $2\sqrt{2}$.

EXERCÍCIO: E97G40_plano_mediador_019

Descrição sumária do exercício: Neste exercício determina-se a equação cartesiana de um plano mediador de um segmento de reta $[AB]$. São dadas as coordenadas do ponto B e são fornecidas condições para se determinar as coordenadas do ponto A. Todos os valores numéricos foram parametrizados; no entanto essa parametrização foi feita de modo a que os dois pontos tivessem a mesma ordenada e a mesma cota.

Enunciado:

Considere a reta r de equação

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+9}{6}$$

e o ponto $B(5, -7, -9)$.

Sabendo que A é o ponto da reta r de abcissa 2, determine a equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta $[AB]$.

- ☐ $x = \frac{7}{2}$
- ☐ $-\frac{3}{2}x - 7y = -9$
- ☐ $x = -\frac{3}{2}$
- ☐ $-\frac{3}{2}x - 9z = -7$

Proposta de resolução:

Como se sabe que o ponto A pertence à reta r e tem de abcissa 2, é possível determinar as outras duas coordenadas do ponto substituindo, na equação da reta, a coordenada x por 2:

$$\frac{2-2}{-7} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+9}{6}\,.$$

Obtêm-se as seguintes equações:

$$\begin{cases} \dfrac{y+7}{2} = 0 \\[2ex] \dfrac{z+9}{6} = 0 \end{cases}.$$

Donde,

$$\begin{cases} y = -7 \\ z = -9 \end{cases}.$$

O ponto A tem, assim, coordenadas $(2, -7, -9)$.

Seja $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano mediador de $[AB]$. Por definição,

$$\mathrm{d}(A, P) = \mathrm{d}(B, P),$$

ou seja,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-(-7))^2 + (z-(-9))^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-(-7))^2 + (z-(-9))^2}\,.$$

Uma vez que

$$(x-2)^2 + (y-(-7))^2 + (z-(-9))^2 \geq 0 \wedge (x-5)^2 + (y-(-7))^2 + (z-(-9))^2 \geq 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

a condição anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} & (x-2)^2 + (y+7)^2 + (z+9)^2 = (x-5)^2 + (y+7)^2 + (z+9)^2 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 = (x-5)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 = x^2 - 10x + 25 \\ \Leftrightarrow\ & 6x = 21 \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{7}{2}\,. \end{aligned}$$

Pode então concluir-se que a equação cartesiana do plano mediador do segmento $[AB]$ é o plano de equação $x = \frac{7}{2}$.

EXERCÍCIO: E97G40_posicao_rel_ret_R3_012

Descrição sumária do exercício: Neste exercício apresentam-se as coordenadas de um vetor, sendo uma delas um parâmetro m, e uma condição que define uma reta. Pretende determinar-se o parâmetro m de modo que o vetor dado seja um vetor diretor de uma reta paralela à reta dada. Todos os valores apresentados no exercício são parametrizados.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos A e B de forma a que $\overrightarrow{AB}$ tem coordenadas $(3, m, -2)$.

Considere-se ainda a reta r definida pela condição

$$\frac{x+7}{15} = \frac{y+7}{15} = \frac{-2-z}{10}.$$

O valor de m para o qual as retas AB e r são paralelas é:

- ☐ $m = 3$
- ☐ $m = 5$
- ☐ $m = 0$
- ☐ $m = -5$

Proposta de resolução:

As duas retas são paralelas se os seus vetores diretores forem colineares.

Das equações cartesianas da reta na forma

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

sabe-se que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2, v_3) as coordenadas de um seu vetor diretor.

Da condição que define a reta r é possível obter as coordenadas de um vetor diretor. Para isso, multiplica-se a fração $\dfrac{-2-z}{10}$ por -1 e obtêm-se as equações cartesianas da reta r na forma:

$$\frac{x+7}{15} = \frac{y+7}{15} = \frac{z+2}{-10}.$$

Pode concluir-se que $(15, 15, -10)$ são as coordenadas de um vetor diretor.

Os vetores $(3, m, -2)$ e $(15, 15, -10)$ são colineares se existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(15, 15, -10) = \alpha(3, m, -2),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 15 = 3\alpha \\ 15 = m \times \alpha \\ -10 = -2\alpha\,. \end{cases}$$

Donde, $\alpha = \dfrac{15}{3} = \dfrac{-10}{-2} = 5$ e, consequentemente, $m = \dfrac{15}{\alpha} = \dfrac{15}{5} = 3$.
Assim, o valor de m é igual a 3.

EXERCÍCIO: E97G40_posicao_planos_014

Descrição sumária do exercício: Neste exercício, dadas duas equações cartesianas do plano, determina-se a posição relativa entre eles. Todos os valores presentes nas equações dos planos são parametrizados; através desses parâmetros é verificado o paralelismo dos vetores normais ao plano, se os planos são ou não coincidentes e a perpendicularidade entre eles. Este exercício implica assim quatro resoluções distintas, consoante os valores parametrizados.

Enunciado:

Num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha : -7x - 4y + 8z - 10 = 0 \quad \text{e} \quad \beta : -8x - 2y - 8z - 4 = 0\,.$$

Os planos α e β são:

- ☐ perpendiculares
- ☐ estritamente paralelos
- ☐ coincidentes
- ☐ concorrentes não perpendiculares

Proposta de resolução:

A equação cartesiana de um plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que (a, b, c) são as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Para se estudar a posição relativa entre dois planos basta estudar a posição relativa entre vetores normais a cada um dos planos.

Nesta situação, $v_\alpha(-7, -4, 8)$ e $v_\beta(-8, -2, -8)$ são vetores normais aos planos α e β, respetivamente.

Em primeiro lugar pode verificar-se se os dois vetores são colineares, ou seja, se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$(-7, -4, 8) = k(-8, -2, -8)\,,$$

ou seja,

$$\begin{cases} -7 = -8k \\ -4 = -2k \\ 8 = -8k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{7}{8} \\ k = 2 \\ k = -1 \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, não existe $k \in \mathbb{R}$ que verifique a condição. Pode concluir-se que os vetores normais ao plano não são colineares, logo os planos não são paralelos.

Os planos são perpendiculares se o produto escalar entre os vetores v_α e v_β for nulo.

Calcule-se assim o produto escalar entre os dois vetores:

$$\begin{aligned} (-7, -4, 8) \cdot (-8, -2, -8) &= -7 \times (-8) + (-4) \times (-2) + 8 \times (-8) \\ &= 56 + 8 - 64 \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

o que permite concluir que os planos são perpendiculares.

EXERCÍCIO: E97G40_paralelismo_plano_reta_016

Descrição sumária do exercício: Neste exercício é apresentada a equação de um plano e uma condição que define uma reta, na qual está presente um parâmetro m. Pretende determinar-se o valor desse parâmetro de modo a que a reta seja paralela ao plano. Todos os valores numéricos presentes são parametrizados. A imagem foi inicialmente feita utilizando o software *Geogebra* e exportada para linguagem TikZ.

Enunciado:

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação

$$2x + 8y - 8z = 0.$$

O valor de m para o qual a condição $\frac{x+6}{4} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-9}{m}$ define uma reta paralela ao plano α é:

- ☐ $m = 11$
- ☐ $m = -16$
- ☐ $m = -11$
- ☐ $m = \frac{34}{9}$

Proposta de resolução:

A equação cartesiana de um plano é da forma

$$ax + by + cz + d = 0$$

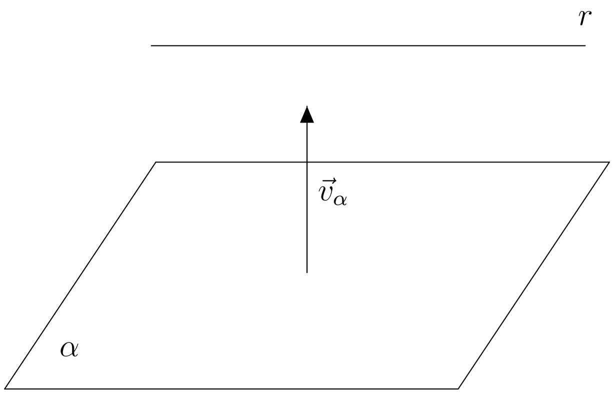
em que (a, b, c) são as coordenadas de um vetor normal ao plano.

Das equações cartesianas da reta na forma

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

sabe-se que (x_0, y_0, z_0) são as coordenadas de um ponto que lhe pertence e (v_1, v_2, v_3) as coordenadas de um seu vetor diretor.

Uma reta é paralela a um plano se o seu vetor diretor é perpendicular ao vetor normal ao plano.



Da equação do plano obtém-se $\vec{v}(2, 8, -8)$ como um vetor normal ao plano e das equações da reta obtém-se $\vec{u}(4, 10, m)$ como um seu vetor diretor.

Pretende determinar-se o valor de m de modo a que os dois vetores sejam perpendiculares, ou seja, que o produto escalar dos dois vetores seja nulo.

Assim,

$$\begin{aligned} & \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2, 8, -8) \cdot (4, 10, m) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2 \times 4 + 8 \times 10 + (-8)\, m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 8 + 80 - 8m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 88 - 8m = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -8m = -88 \\ \Leftrightarrow\ & m = 11\,. \end{aligned}$$

A resposta correta é, então, $m = 11$.

4.4 Tópico 4340 - Produto escalar de vetores

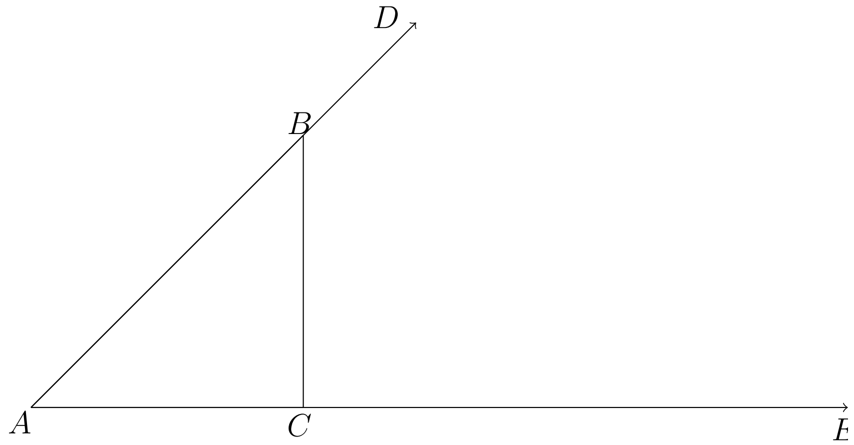
Os exercícios criados e inseridos no tópico “Produto escalar de vetores”são os apresentados na Tabela 4.1. A maioria deles foi já apresentada nas secções anteriores e, por isso, apresenta-se de seguida o exercício que foi incluído unicamente neste tópico.

EXERCÍCIO: E97G40_produto_escalar2_R2_008

Descrição sumária do exercício: Neste exercício pretende determinar-se o produto escalar entre dois vetores, dadas as suas normas, com dados no enunciado que possibilitam a determinação do cosseno do ângulo por eles formado. Tanto as normas dos vetores, como as medidas dos catetos, são valores parametrizados. A figura foi inicialmente criada utilizando o software *Geogebra*, exportada para linguagem TikZ e posteriormente parametrizada. Neste exercício houve necessidade de efetuar arredondamentos de números, utilizando instrução "round", para a parametrização da figura.

Enunciado:

Na figura estão representados dois vetores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 8 e 12, respetivamente.



No segmento de reta $[AD]$ está assinalado um ponto B.

No segmento de reta $[AE]$ está assinalado um ponto C.

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C e $\overline{AC} = 4$ e $\overline{CB} = 4$.

Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$.

- ☐ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 48\sqrt{2}$
- ☐ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 96$
- ☐ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 24$
- ☐ $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 20$

Proposta de resolução:

Por definição de produto escalar, sabe-se que

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = ||\overrightarrow{AD}||\ ||\overrightarrow{AE}||\ \cos\alpha,$$

em que α é o ângulo formado pelos dois vetores.

Uma vez que é dada a norma de cada um dos vetores, é necessária a determinação do valor de $\cos\alpha$ para posterior cálculo do produto escalar.

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo pode ser determinado pela razão entre a medida do cateto que lhe é adjacente e a medida da hipotenusa. Sendo $[ABC]$ um triângulo retângulo, para $\alpha = \angle CAB$, tem-se que $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Determine-se, aplicando o Teorema de Pitágoras, $\overline{AB}$:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4^2 + 4^2 = 32.$$

Sendo $\overline{AB}$ a medida do segmento de reta $[AB]$, tem-se que $\overline{AB} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,$.

Pode, agora, determinar-se o valor de $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} &= ||\overrightarrow{AD}||\ ||\overrightarrow{AE}||\ \cos\alpha \\
&= 8 \times 12 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
&= 48\sqrt{2}\,.
\end{aligned}$$

A resposta correta é assim $48\sqrt{2}$.

4.5 Questões de resposta aberta

Nesta secção são apresentadas questões de resposta aberta. O objetivo da criação deste tipo de questões era, inicialmente, permitir ao estudante verificar os seus conhecimentos relativamente à compreensão das definições teóricas que vão surgindo ao longo do tema em estudo.

Estas questões tanto podem ser usadas pelos estudantes nos seus estudos, como por docentes para a elaboração de instrumentos de trabalho e/ou avaliação dos seus discentes.

EXERCÍCIO: E97G40_Subconjuntos_plano_026

Descrição sumária do exercício: Neste exercício pretende-se que o estudante relacione as definições de alguns domínios planos com as equações/ inequações que as definem. Todos os valores apresentados são parametrizados.

Enunciado:

Identifique e defina analiticamente, utilizando equações e inequações cartesianas, os seguintes conjuntos de pontos do plano:

1. Pontos que distam igualmente dos pontos $A(6,-3)$ e $B(-5,-3)$.

2. Pontos cuja distância ao ponto $C(6,1)$ não excede 7 unidades.

3. Pontos cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-5,0)$ e $B(0,5)$ é igual a 14.

4. Pontos que distam duas unidades da reta de equação $y=-7$.

Proposta de resolução:

1. Pontos que distam igualmente dos pontos $A(6,-3)$ e $B(-5,-3)$.

O conjunto de pontos que distam igualmente dos pontos $A(6,-3)$ e $B(-5,-3)$ é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Para um ponto genérico $P(x,y)$ pertencente à mediatriz dos dois pontos, tem-se que

$$\mathrm{d}(A,P)=\mathrm{d}(B,P).$$

Ou seja,

$$\sqrt{(x-6)^2+(y-(-3))^2}=\sqrt{(x-(-5))^2+(y-(-3))^2},$$

Uma vez que

$$(x-6)^2 + (y-(-3))^2 \geq 0 \wedge (x-(-5))^2 + (y-(-3))^2 \geq 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

a condição anterior é equivalente a

$$\begin{aligned} & (x-6)^2 + (y+3)^2 = (x+5)^2 + (y+3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-6)^2 = (x+5)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 12x + 36 = x^2 + 10x + 25 \\ \Leftrightarrow \quad & -22x = -11 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

. A equação da mediatriz é $x = \dfrac{1}{2}$.

2. Pontos cuja distância ao ponto $C(6, 1)$ não excede 7 unidades.

O conjunto dos pontos cuja distância ao ponto $C(6, 1)$ não excede 7 unidades é o círculo de centro em C e raio 7.

A equação reduzida de uma circunferência é da forma $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, em que (x_0, y_0) são as coordenadas do seu centro e r a medida do seu raio. Assim, o domínio plano descrito pode ser definido pela inequação

$$(x-6)^2 + (y-1)^2 \leq 49.$$

3. Pontos cuja soma das medidas das distâncias aos pontos $A(-5, 0)$ e $B(0, 5)$ é igual a 14.

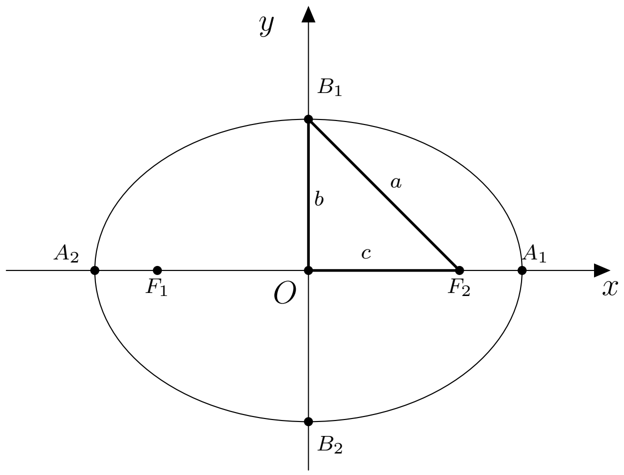
O conjunto de pontos que verificam esta condição é uma elipse cujos focos são os ponto A e B.

A equação reduzida de uma elipse centrada na origem é da forma

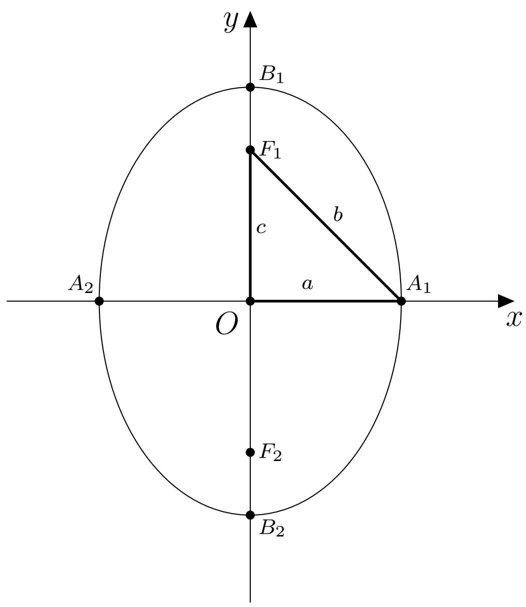
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

em que a é a medida do semieixo que se encontra sobre o eixo das abcissas e b é a medida do semieixo que se encontra sobre o eixo das ordenadas.

Podem ocorrer duas situações distintas:



Os focos pertencem a Ox e $a > b$



Os focos pertencem a Oy e $a < b$

Designam-se por vértices os pontos de interseção da elipse com os eixos coordenados, representados nas imagens por A_1, A_2, B_1 e B_2.

Da definição de elipse sabe-se ainda que o valor do parâmetro a, quando o seu eixo horizontal é maior que o vertical, é igual ao comprimento do segmento de reta que une um dos focos a um dos vértices da elipse que se encontra sobre o eixo das ordenadas. Quando o eixo vertical é maior que o eixo horizontal, o valor do parâmetro b é igual à distância de um dos focos a um dos vértices da elipse que se encontra sobre o eixo das abcissas.

$\overline{F_1, F_2}$ é a distância focal, isto é, a distância entre os dois focos.

Do enunciado sabe-se que o pontos A e B são os focos da elipse e, como estão contidos no eixo Ox, pode deduzir-se que o seu eixo maior está também sobre o eixo Ox, correspondendo assim à primeira situação.

Sabe-se ainda que $a = \dfrac{14}{2} = 7$ e $c = 5$ (semidistância focal).

Aplicando o Teorema de Pitágoras, tem-se que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow 7^2 = b^2 + 5^2 \Leftrightarrow b^2 = 49 - 25 = 24.$$

O que permite escrever a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

4. Pontos que distam duas unidades da reta de equação $y = -7$.

O conjunto de pontos que distam duas unidades da reta de equação $y = -7$ são duas retas, paralelas a $y = -7$, de equações $y = -7 - 2$ e $y = -7 + 2$, ou seja,

$$y = -9 \quad \vee \quad y = -5.$$

EXERCÍCIO: E97G40_Retas_plano_027

Descrição sumária do exercício: Neste exercício o estudante pode verificar os seus conhecimentos relativos a retas no plano, sendo apresentadas três equações de retas de diferentes formas. Todos os valores apresentados são parametrizados.

Enunciado: Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, as retas r, s e p definidas, respetivamente, por

$$-2x+2y+6 = 0, \quad (x, y) = (5, -3)+t(6, 10), t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = \lambda \\ 3y = 2 + 5\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Determine os pontos em que a reta r interseta os eixos coordenados.

2. Determine a ordenada do ponto da reta s que tem abcissa -2.

3. Justifique que o ponto $(-1, -1)$ pertence à reta p.

4. Indique, para cada uma das retas, um vetor diretor.

5. Escreva a equação reduzida da reta s.

6. Indique, de entre r, s e p, eventuais pares de retas paralelas.

Proposta de resolução:

1. Determine os pontos em que a reta r interseta os eixos coordenados.

A reta r interseta o eixo das abcissas no ponto de ordenada 0. Determine-se a sua abcissa:

$$\begin{aligned} & -2x + 2 \times 0 + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2x = -6 \\ \Leftrightarrow\ & x = 3\,. \end{aligned}$$

Assim, $(3, 0)$ é ponto de interseção com o eixo Ox. A reta r interseta o eixo das ordenadas no ponto de abcissa 0. Determine-se, agora, a sua ordenada:

$$\begin{aligned} & -2 \times 0 + 2y + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2y = -6 \\ \Leftrightarrow\ & y = -3\,, \end{aligned}$$

o que permite concluir que a reta interseta o eixo y no ponto $(0, -3)$.

Assim, a reta r interseta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas $(3, 0)$ e $(0, -3)$.

2. Determine a ordenada do ponto da reta s que tem abcissa -2.

Da equação vetorial da reta s obtêm-se as equações:

$$\begin{cases} x = 5 + 6t \\ y = -3 + 10t \end{cases}.$$

Para $x = -2$, vem

$$\begin{cases} -2 = 5 + 6t \\ y = -3 + 10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{7}{6} \\ y = -3 + 10t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{7}{6} \\ y = -3 + 10 \times \left(-\dfrac{7}{6}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{7}{6} \\ y = -\dfrac{44}{3} \end{cases}.$$

A ordenada do ponto da reta s que tem abcissa -2 é então $-\dfrac{44}{3}$.

3. Justifique que o ponto $(-1,-1)$ pertence à reta p.

O ponto $(-1,-1)$ pertence à reta p se existir $\lambda \in \mathbb{R}$ para o qual se verifiquem as condições que definem a reta p.

Substituindo as coordenadas do ponto nas equações que definem a reta, vem

$$\begin{cases} -1 = \lambda \\ 3 \times (-1) = 2 + 5\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = \lambda \\ \dfrac{-3-2}{5} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases},$$

donde se conclui que o ponto $(-1,-1)$ pertence à reta p.

4. Indique, para cada uma das retas, um vetor diretor.

Um vetor diretor de uma reta pode ser determinado a partir de dois pontos que pertençam à reta.

Determinem-se dois pontos que pertençam à reta r:

- Para $x = 0$, vem $0 + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -3$;

- Para $x = 1$, vem $-2 \times 1 + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

Assim, um vetor diretor da reta r pode ser $\vec{v}_r = (0,-3) - (1,-2) = (-1,-1)$.

Da equação vetorial da reta s obtém-se como vetor diretor $\vec{v}_s(6,10)$.

No que respeita à reta p, em primeiro lugar determinam-se dois pontos que lhe pertençam:

- Para $x = 0$, vem $\lambda = 0$, donde resulta $3y = 2 \Leftrightarrow y = \dfrac{2}{3}$;

- Para $x = 1$, vem $\lambda = 1$, donde resulta $3y = 2 + 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{7}{3}$.

Assim, um vetor diretor da reta p pode ser $\vec{v}_p = \left(0, \dfrac{2}{3}\right) - \left(1, \dfrac{7}{3}\right) = \left(-1, -\dfrac{5}{3}\right)$.

5. Escreva a equação reduzida da reta s.

A equação reduzida de uma reta é da forma $y = mx + b$, em que m representa o declive e b a ordenada na origem. Pretende determinar-se estes dois valores.

Da equação vetorial da reta s sabe-se que um seu vetor diretor tem de coordenadas $(6, 10)$, donde $m = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Para determinar o parâmetro b basta substituir na equação geral $y = mx + b$ os valores de x e y pelas coordenadas de um ponto que pertença à reta, $(5, -3)$, por exemplo, e m pelo valor encontrado anteriormente. Assim,

$$-3 = \frac{5}{3} \times 5 + b \Leftrightarrow b = -3 - \frac{25}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{34}{3}\,.$$

Assim a equação vetorial da reta s é $y = \frac{5}{3}x - \frac{34}{3}$.

6. Indique, de entre r, s e p, eventuais pares de retas paralelas.

Duas retas são paralelas se os seus vetores diretores são colineares, ou seja, as retas r e s são paralelas se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_r = k\ v_s.$$

Neste caso vem

$$v_r = k.v_s \Leftrightarrow (-1,-1) = k(6,10) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 6k \\ -1 = 10k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\dfrac{1}{6} \\ \\ k = -\dfrac{1}{10} \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, pode concluir-se que as retas r e s não são paralelas.

De modo análogo, verifique-se agora se s e p são paralelas:

$$v_s = k.v_p \Leftrightarrow (6,10) = k\left(-1, -\frac{5}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 = -k \\ 10 = -\frac{5}{3}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -6 \\ k = -6 \end{cases},$$

o que permite concluir que as retas s e p são paralelas.

EXERCÍCIO: E97G40_Retas_espaco_028

Descrição sumária do exercício: Neste exercício o estudante pode explorar os seus conhecimentos relacionados com retas no espaço. Todos os valores apresentados são parametrizados.

Enunciado:

Fixado um referencial ortonormado no espaço, considere a reta s de equação vetorial

$$s : (x, y, z) = (0, -1, 0) + t(5, 5, -2), t \in \mathbb{R}\,.$$

1. Averigue se os pontos $A(-2, -3, 6)$ e $B(-5, -6, 2)$ pertencem à reta s.

2. Determine o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.

3. Indique uma equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.

4. Indique uma equação vetorial da reta t perpendicular a s e que passa pelo ponto B.

Proposta de resolução:

1. Averigue se os pontos $A(-2, -3, 6)$ e $B(-5, -6, 2)$ pertencem à reta s.

O ponto A pertence à reta s se existe $t \in \mathbb{R}$, para o qual é satisfeita a equação vetorial que define a reta. Para se encontrar esse valor de t basta substituir as coordenadas (x, y, z) do ponto genérico da reta pelas coordenadas do ponto A:

$$(-2, -3, 6) = (0, -1, 0) + t(5, 5, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 5t \\ -3 = -1 + 5t \\ 6 = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{-2}{5} \\ \\ t = \dfrac{-3+1}{5} \\ \\ t = \dfrac{6}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{2}{5} \\ \\ t = -\dfrac{2}{5} \\ \\ t = -3 \end{cases}.$$

Como o sistema é impossível, conclui-se que o ponto A não pertence à reta s.

Procedendo de modo análogo com o ponto B, vem

$$(-5,-6,2)=(0,-1,0)+t(5,5,-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -5=5t \\ -6=-1+5t \\ 2=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{-5}{5} \\ t=\dfrac{-6+1}{5} \\ t=\dfrac{2}{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=-1 \\ t=-1 \end{cases}.$$

donde se conclui que o ponto B pertence à reta s.

2. Determine o ponto de interseção da reta s com o plano xOz.

O ponto de interseção da reta s com o plano xOz é o ponto de ordenada 0. Para determinar as outras duas coordenadas do ponto, basta substituir na equação da reta a ordenada do ponto genérico por 0.

De $(x,0,z)=(0,-1,0)+t(5,5,-2)$ resulta

$$\begin{cases} x=5t \\ 0=-1+5t \\ z=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5t \\ t=\dfrac{1}{5} \\ z=-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5\times\dfrac{1}{5} \\ t=\dfrac{1}{5} \\ z=-2\times\dfrac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ t=\dfrac{1}{5} \\ z=-\dfrac{2}{5} \end{cases}.$$

Assim, o ponto de interseção da reta s com o plano xOz é o ponto de coordenadas $\left(1,0,-\dfrac{2}{5}\right)$.

3. Indique uma equação vetorial da reta r, paralela a s e que passa pela origem do referencial.

Duas retas são paralelas se os seus vetores diretores forem colineares, ou simplesmente se tiverem o mesmo vetor diretor. Usando o vetor diretor da reta s e como ponto a origem do referencial, $(0,0,0)$, uma equação da reta r pode ser

$$r:(x,y,z)=(0,0,0)+t(5,5,-2),\ t\in\mathbb{R},$$

que é equivalente a

$$r:(x,y,z)=t(5,5,-2),\ t\in\mathbb{R}.$$

4. Indique uma equação vetorial da reta t perpendicular a s e que passa pelo ponto B.

Duas retas são perpendiculares se os seus vetores diretores forem também perpendiculares. Por sua vez, dois vetores são perpendiculares se o seu produto escalar for nulo. Designe-se por $\vec{v}_s$ um vetor diretor da reta s e por $\vec{v}_t$ um vetor diretor da reta t. Tem-se que:

$$\vec{v}_s \cdot \vec{v}_t = 0 \Leftrightarrow (5,5,-2)\cdot(v_1,v_2,v_3) = 0 \Leftrightarrow 5v_1+5v_2-2v_3 = 0\,.$$

Para $v_1 = 1$ e $v_2 = 1$, por exemplo, vem

$$5+5-2v_3 = 0 \Leftrightarrow v_3 = \frac{-5-5}{-2} = 5\,.$$

Logo $\vec{v}_t = (1,1,5)$ e, consequentemente, a equação vetorial da reta t poderia ser

$$t:(x,y,z) = (-5,-6,2)+k(1,1,5), k \in \mathbb{R}\,.$$

EXERCÍCIO: E97G40_esfera_029

Descrição sumária do exercício: Este exercício pretende explorar conhecimentos relacionados com a superfície esférica e a sua interseção com planos paralelos aos planos coordenados. Os valores parametrizados são os coeficientes de x, y e z e o termo independente da equação da superfície esférica dada, os valores numéricos das questões 2.2. e 2.3. e as coordenadas do ponto da questão 3.

Enunciado:

Considere, fixado num referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação $x^2+y^2+z^2-8x+4y-6z-20=0$.

1. Indique o centro C e o raio da superfície esférica.

2. Determine expressões analíticas que definem a interseção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:

2.1. O eixo Ox.

2.2. O plano de equação $z = 3$.

2.3. O plano de equação $y = 5$.

3. Prove que o ponto $A(4,-2,10)$ pertence à superfície esférica e determine a condição que define a esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

Proposta de resolução:

1. Indique o centro C e o raio da superfície esférica.

Para determinar o centro e o raio da superfície esférica é necessário escrever a condição que a define na forma

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2,$$

em que (x_0,y_0,z_0) são as coordenadas do centro e r a medida do seu raio.

Para isso:

$$\begin{aligned}
& x^2+y^2+z^2-8x+4y-6z-20=0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-8x+16-16+y^2+4y+4-4+z^2-6z+9-9-20=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-20-16-4-9=0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=49\,.
\end{aligned}$$

Assim, o centro da circunferência é $C(4,-2,3)$ e o seu raio tem de medida $r=\sqrt{49}=7$.

2. Determine expressões analíticas que definam a interseção da superfície esférica com cada um dos seguintes conjuntos de pontos:

2.1. O eixo Ox.

A superfície esférica interseta o eixo Ox no ponto de ordenada e cota nulas. Assim, para $y=0$ e $z=0$ vem:

$$\begin{aligned}
& (x-4)^2+(0+2)^2+(0-3)^2=49 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2+4+9=49 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-8x+16+4+9=49 \\
\Leftrightarrow\ & x^2-8x-20=0\,.
\end{aligned}$$

Aplicando a fórmula resolvente,

$$\begin{aligned} & x = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{8 \pm \sqrt{144}}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = \frac{8+12}{2} \quad \vee \quad x = \frac{8-12}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 10 \quad \vee \quad x = -2\,. \end{aligned}$$

O resultado anterior permite concluir que a superfície esférica interseta o eixo Ox nos pontos de coordenadas $(10, 0, 0)$ e $(-2, 0, 0)$.

2.2. O plano de equação $z = 3$.

Para determinar a interseção da superfície esférica com o plano $z = 3$, substituí-se na equação da superfície esférica a coordenada z do ponto genérico por 3:

$$\begin{aligned} & (x-4)^2 + (y+2)^2 + (3-3)^2 = 49 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-4)^2 + (y+2)^2 = 49\,. \end{aligned}$$

O que permite concluir que a interseção da superfície esférica com o plano $z = 3$ é uma circunferência de centro $(4, -2, 3)$ e de raio 7, contida nesse plano.

2.3. O plano de equação $y = 5$.

Para $y = 5$ vem:

$$\begin{aligned} & (x-4)^2 + (5+2)^2 + (z-3)^2 = 49 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-4)^2 + 49 + (z-3)^2 = 49 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-4)^2 + (z-3)^2 = 0\,. \end{aligned}$$

A condição anterior só se verifica para $x = 4$ e $z = 3$, donde se conclui que a superfície esférica interseta o plano $y = 5$ num único ponto de coordenadas: $(4, 5, 3)$.

3. Prove que o ponto $A(4, -2, 10)$ pertence à superfície esférica e determine uma condição que define a esfera de centro A e raio $\overline{AC}$.

Verifique-se que o ponto $A(4, -2, 10)$ pertence à superfície esférica, substituindo na equação dessa superfície as coordenadas do ponto genérico pelas coordenadas do ponto A:

$$(4-4)^2 + (-2+2)^2 + (10-3)^2 = 49,$$

$$7^2 = 49,$$

$$49 = 49\,.$$

Donde se conclui que o ponto A pertence efetivamente à superfície esférica.

Para determinar a medida do raio $\overline{AC}$ determina-se a distância de $A(4, -2, 10)$ a $C(4, -2, 3)$:

$$\mathrm{d}(A, C) = \sqrt{(4-4)^2 + (-2-(-2))^2 + (3-10)^2} = \sqrt{(3-10)^2} = \sqrt{49} = 7\,.$$

Assim, a inequação reduzida da esfera de centro A e raio $\overline{AC}$ é:

$$\begin{aligned} & (x-4)^2 + (x+2)^2 + (y-10)^2 \leq 7^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-4)^2 + (x+2)^2 + (y-10)^2 \leq 49\,. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Reflexão Final

O insucesso à disciplina de Matemática é uma realidade que os professores têm que tentar combater todos os anos. A diversificação de estratégias de ensino pode ser um meio de incentivar e estimular o gosto pela disciplina.

Os nossos alunos cresceram num ambiente em que as tecnologias de informação assumem um papel importante. Uma das principais funções do professor é criar e estimular o ambiente educativo, portanto é da sua responsabilidade a inserção dessas tecnologias na sala de aula, de modo a integrar os interesses do aluno no processo de aprendizagem.

De acordo com o *National Council of Teachers of Mathematics*, o uso da tecnologia surge como um dos princípios para o ensino da matemática. Refere ainda que a tecnologia não deverá ser usada como uma substituição para a compreensão e intuição elementar, mas, pelo contrário, poderá e deverá ser usada para estimular essa compreensão e intuição [17].

Ao longo da minha prática letiva sempre foi minha preocupação manter-me atualizada no que diz respeito às novas tecnologias e à sua utilização em sala de aula. O principal objetivo deste trabalho vai de encontro a esse meu interesse: a criação de recursos digitais de apoio ao ensino da Geometria Analítica no ensino secundário, de fácil acesso, que permitem ao aluno a realização de um estudo autónomo e avaliação da sua evolução.

Este trabalho foi um verdadeiro desafio uma vez que não tinha conhecimentos de linguagem LaTeX, de programação em *Python* ou HTML. Realizei um trabalho bastante autónomo e autodidata, recorrendo a tutoriais e exemplos disponíveis na internet. É claro que a ajuda dos orientadores foi indispensável para superar algumas dificuldades.

Apesar da maioria das imagens apresentadas no capítulo 2 e nos exercícios criados ter sido inicialmente construída recorrendo ao software *Geogebra*, a concretização final foi um processo muito moroso.

Foi um trabalho muito estimulante pois a descoberta e aplicação de novas instruções foi permanente, com imediata possibilidade de teste. Conseguir-se um produto final igual ao conceito inicialmente idealizado é muito motivador.

A minha avaliação deste trabalho não passa só pela escrita da dissertação e pela elaboração e funcionalidade dos exercícios apresentados; passará, espero que num futuro próximo, pela análise do trabalho desenvolvido pelos alunos quando possibilitados a utilizar esta plataforma que para eles foi criada. Para mim essa será a conclusão e a verdadeira avaliação do trabalho por mim feito.

Todos os trabalhos podem ser melhorados e este não é exceção. Associado a cada exercício poderiam criar-se *applets* em Geogebra que permitissem ao aluno verificar as propriedades/ relações utilizadas na sua resolução. A própria plataforma SIACUA será sempre um produto inacabado uma vez que todos os conteúdos vão carecendo de atualizações ou complementos.

De acordo com José Sebastião e Silva,

"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência."

Bibliografia

[1] Barros, D. *et al.*. Educação E Tecnologias: Reflexão, Inovação E Práticas. *Lisboa: e-book http://livroeducacaoetecnologias.blogspot.pt/*, 2011.

[2] Bivar, A. *et al.*. Metas Curriculares para o Ensino Secundário, Matemática A, Caderno de Apoio, 10º ano. *Ministério da Educação e Ciência*, 2013.

[3] Bivar, A. *et al.*. Metas Curriculares para o Ensino Secundário, Matemática A, Caderno de Apoio, 11º ano. *Ministério da Educação e Ciência*, 2013.

[4] Costa, B., Rodrigues, E.. Novo Espaço, Matemática A, 10º Ano, parte 1. *Porto Editora*, 2010.

[5] Costa, B., Rodrigues, E.. Novo Espaço, Matemática A, 11º Ano, parte 1. *Porto Editora*, 2011.

[6] Cruz, P., Oliveira, P., Seabra, D.. Arquivo de Exercícios Parametrizados, 1ª Conferência. Ibérica de Inovação em Educação com TIC (ieTIC2011), Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, 2011.

[7] Cruz, P., Oliveira, P., Seabra, D.. MEGUA e os cinco R‘s: Base de Dados de Exercícios Parametrizados. *TICAMES*, 2013.

[8] Direção-Geral de Estatísticas da Educação e Ciência. Educação em Números - Portugal 2012, 2012.

[9] Figueiredo, M.. Recursos digitais de apoio ao ensino de Probabilidades (MACS), dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2014.

[10] Fonseca, M.M.G.. Modelo Bayesiano do Aluno no Cálculo com Várias Variáveis, dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2014.

[11] Giraldes, E. et al.. Álgebra Linear e Geometria Analítica. *McGrawHill*, 1995.

[12] Instituto de Avaliação Educativa, I.P.. Matemática A - Questões de Exames Nacionais e de Testes Intermédios. *Ministério da Educação e Ciência*, 2014.

[13] Instituto Nacional de Estatística. Sociedade da Informação e do Conhecimento - Inquérito à Utilização de Tecnologias da Informação e da Comunicação pelas Famílias, 2014.

[14] Lemos, E.. Recursos Digitais de Apoio ao Ensino em Organização e Tratamento de Dados (2º e 3º Ciclos), dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2014.

[15] Loureiro, C. *et al.*. Geometria. *Ministério da Educação*, 1998.

[16] Machado, A. *et al.*. Olhares de uma Formação de Professores Suportada pelo Qimterativo. *ticEDUCA*, 2012.

[17] Martins, C.. Sistemas de Equações - uma abordagem criativa, dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2012.

[18] MEGUA, https://sagemath.clients.ua.pt/.

[19] Ministério da Educação e Ciência. Programa e Metas Curriculares, Matemática A. *Ministério da Educação e Ciência*, 2013.

[20] Monteiro, F.. Recursos digitais de apoio ao ensino das funções exponencial e logarítmica, dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2014.

[21] National Council of Teachers of Mathematics. Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar. *APM*, 1991.

[22] National Council of Teachers of Mathematics. Princípios e normas para a Matemática escolar. *APM*, 2007.

[23] Oliveira, M. P., Silva, S. V.. An overview of PmatE: developing software for all degrees of teaching. Proceedings of the International Conference in Mathematics Sciences and Sciences Education, June 11-14. *University of Aveiro*, 2006.

[24] Pacheco-Venegas N.D., Lópes G. & Andrade-Aréchiga M.. Conceptualization, development and implementation of a web-based system for automatic evaluation of mathematical expressions, Computers & Education (2015). *doi: 10.1016/j.compedu.2015.03.021.*

[25] Resolução do Conselho de Ministros n.º 137/2007. Plano Tecnológico da Educação. Diário da República, 1.ª série - N.º 180 - 18 de Setembro de 2007.

[26] Sagemath, http://www.sagemath.org/.

[27] Santos, S.. Recursos Digitais de Apoio ao Ensino das Funções no 3.º Ciclo do Ensino Básico, dissertação de Mestrado. *Universidade de Aveiro*, 2014.

[28] SIACUA, http://siacua.web.ua.pt/.

[29] Wick,D.. Free and open-source software applications for mathematics and education. *Electronic Proceedings of the Twenty-first Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics.*, Louisiana, New Orleans, pp.300-304. 2009.